Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 9

MPSI Lycée Camille Jullian

15 mai 2024

Exercice 1

On s'intéresse dans cet exercice à la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^2-2}{X^4+2X^3+X^2}$.

1. Préciser le degré de F, ainsi que ses racines et ses pôles (avec leur multiplicité éventuelle).
2. Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction F.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-2}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$.
4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-2}{k^4+2k^3+k^2}$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (a) Calculer explicitement les valeurs de S_1, S_2 et S_3. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$?
   (b) Exprimer S_n en fonction de n, de T_n et de T_{n+1}.
   (c) On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$. Quel est le signe de cette limite ?

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0, I_1 et I_2.
2. Étudier la monotonie de la suite (I_n), en déduire sa convergence.
3. Étudier les variations de la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$ (on dressera un tableau de variations complet, limites incluses). En déduire que, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{e}$.
4. Montrer à l'aide de la question précédente que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)e}$. En déduire la limite de la suite (I_n).
5. Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales I_n et I_{n+1}. Déterminer à l'aide de cette relation un équivalent (le plus simple possible) de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Déduire de la relation obtenue à la question précédente que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_n}{n!} = 1 - \dfrac{1}{e}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.
7. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 3

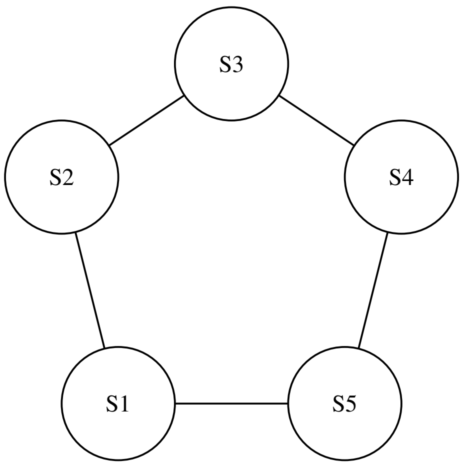
Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on s'intéresse aux vecteurs suivants : $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (-2, 1, 1)$. On notera par ailleurs $F = \mathrm{Vect}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(v, w)$.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire sur les sous-espaces F et G ?
2. Calculer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 1)$ dans cette base.
3. On note p la projection sur G parallèlement à F. Déterminer une expression explicite de $p(x, y, z)$.
4. On note s la symétrie sur F parallèlement à G. Donner une relation entre s et p, en déduire l'expression explicite de s.
5. On note enfin f l'application définie par $f = 3\,id - s$. Exprimer f en fonction de p et id, puis montrer que f est une application bijective, et préciser sa réciproque (on se contentera d'une expression théorique en fonction de p et de id).
6. Déterminer f^2 et f^3 en fonction de p et id. Conjecturer une formule pour f^n (qu'on ne demande pas de démontrer). Cette formule reste-t-elle vraie pour $n = -1$?

Exercice 4

Aglaé et Bernardo se donnent rendez-vous dans un complexe constitué de cinq sites notés S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés entre eux par des routes comme illustré ci-dessous. Ils arrivent tous les deux au même moment au rendez-vous (ce moment sera noté « instant 0 » pour la suite), mais suite à un malentendu, Aglaé se trouve sur le site S_1 alors que Bernardo est en S_2. Ils partent alors à la recherche l'un de l'autre, en respectant les règles suivantes :

- si elle se trouve sur un site à l'instant n, la personne (que ce soit Aglaé ou Bernardo) se déplacera à l'instant $n+1$ vers l'un des deux sites adjacents au site en question, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque. Par exemple, à l'instant 1, Bernardo se retrouve donc sur le site S_1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le site S_3 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- les deux compères se déplacent à chaque instant, simultanément et sans se croiser. Par contre, s'ils atterrissent sur le même site à l'instant n, ils ne bougent plus.



On notera, pour tout entier naturel n, les événements suivants : A_n est vérifié si Aglaé et Bernardo sont sur le même site à l'instant n ; B_n est vérifié si Aglaé et Bernardo sont sur des sites voisins à l'instant n ; et C_n est vérifié si Aglaé et Bernardo sont sur des sites distants de deux routes à l'instant n. On notera a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Donner (ou calculer) les probabilités des évènements A_i, B_i et C_i pour $i \leqslant 2$.
2. Calculer la probabilité qu'Aglaé et Bernardo se soient retrouvés avant l'instant 3 (inclus).
3. Calculer $\mathbb{P}_{A_3}(B_1)$.
4. Justifier rigoureusement que les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements.
5. Montrer que $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$.
6. Donner sans justification les valeurs des autres probabilités conditionnelles analogues (en particulier celles supposant A_n ou B_n réalisés).
7. Montrer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) satisfont les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n &+ \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \dfrac{3}{4}b_n &+ \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{1}{4}b_n &+ \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}.$$
8. Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par la suite (b_n).
9. Calculer explicitement b_n en fonction de n. La formule obtenue devrait faire intervenir les puissances des nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
10. En exprimant c_n en fonction de b_{n+1} et b_n, en déduire la valeur de c_n.
11. Que vaut $a_n + b_n + c_n$? En déduire a_n.
12. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n), et interpréter le résultat obtenu.
13. Calculer la probabilité qu'Aglaé et Bernardo se retrouvent exactement à l'instant n.