Demi-Devoir Surveillé n^o 8

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mars 2024

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On pose par ailleurs $F = \mathrm{Vect}((1,1,0,2),(1,1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x-y-z = y-z-t = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, et donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.
3. On s'intéresse désormais à la famille $\mathcal{F} = ((1,0,1,-1),(1,1,0,1),(0,-1,1,-2))$. Cette famille est-elle libre ?
4. Montrer rigoureusement que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = G$.
5. Décomposer le vecteur $u = (1,2,3,4)$ sous la forme $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. En déduire l'existence pour tout entier naturel n de réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$ (on ne demande **pas** de calculer explicitement les valeurs de a_n et b_n).
3. Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
4. La famille (I_2, A, A^2, A^3) est-elle une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Sinon, précisez la dimension de $\mathrm{Vect}(I_2, A, A^2, A^3)$.
5. On pose $G = \{P(A) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$. Autrement dit, G contient toutes les matrices qui sont combinaisons linéaires des puissances de A.
   (a) Montrer que $G = \mathrm{Vect}(A, I_2)$ (on a bien sûr le droit d'exploiter les premières questions de l'exercice).
   (b) Montrer que $G = F$.
6. Déteminer l'intersection de F et du sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont la trace est nulle.
7. Que vaut $F + H$ (aucun calcul nécessaire) ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$, où on a posé $g(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x - \dfrac{7}{2}$.

1. Étudier les variations de la fonction g, en déduire celles de f.
2. Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$, et donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$.
4. Effectuer un développement asymptotique de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On poussera le développement seulement jusqu'à un ordre permettant d'en déduire l'équation d'une asymptote oblique ainsi que la position relative de la courbe de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
5. Sans effectuer de calcul supplémentaire, déterminer le comportement de f du côté de $-\infty$.
6. Tracer une allure la plus précise possible de la courbe de f. On donne la valeur $\sqrt[3]{2} \simeq \dfrac{5}{4}$.
7. Expliquer pourquoi l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. On note u_n cette solution.
8. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
9. Calculer le deuxième terme du développement asymptotique de u_n.