Devoir Surveillé n^o 7 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 mars 2024

Exercice 1

1. Si i est racine d'un polynôme qui est à coefficients réels, son conjugué $-i$ l'est aussi, et P se factorise donc par X^2+1. Autrement dit, $P=(X^2+1)(aX^2+bX+c)=aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c$. Une identification franchement triviale donne $a=1$, $b=-5$ et $c=6$. Le deuxième facteur X^2-5X+6 admet pour discriminant $\Delta=25-24=1$, et pour racines $X_1=\dfrac{5+1}{2}=3$ et $X_2=\dfrac{5-1}{2}=2$. Il est temps de conclure : $P=(X^2+1)(X-2)(X-3)$ (dans $\mathbb{R}[X]$) ou $P=(X-i)(X+i)(X-2)(X-3)$ (dans $\mathbb{C}[X]$).
2. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et $f'(x)=-\dfrac{2}{1+2x}$, puis $f''(x)=\dfrac{4}{(1+2x)^2}$, expression manifestement positive, ce qui prouve la convexité de f. On peut en déduire notamment que, si x et y sont dans notre intervalle de définition, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, soit $-\ln(1+x+y)\leqslant\dfrac{-\ln(1+2x)-\ln(1+2y)}{2}$. En changeant les signes et en regroupant les ln, on obtient $\dfrac{1}{2}\ln((1+2x)(1+2y))\leqslant\ln(1+x+y)$, et il suffit de passer à l'exponentielle pour en déduire l'inégalité demandée (en exploitant bien sûr le fait que $e^{\frac{1}{2}\ln(a)}=\sqrt{a}$).

Exercice 2

1. (a) Il y a quatre possibilités pour chaque case (vide, Pion, Tour ou Cavalier), donc $4^{16}=4\ 294\ 967\ 296$ positions possibles (ici l'ordre des cases est important, et les répétitions sont évidemment possibles).
   (b) Cela revient à ne laisser que deux possibilités par case, donc $2^{16}=65\ 536$ positions au total.
   (c) Il est plus simple de passer par le complémentaire : il y a 3^{16} positions sans cavalier (même raisonnement qu'aux deux questions précédentes), donc $4^{16}-3^{16}=4\ 251\ 920\ 575$.
   (d) Pour créer une telle position il faut choisir l'emplacement des quatre pions parmi les 16 cases disponibles, puis l'emplacement des quatre tours (plus que 12 cases disponibles), et enfin celui des quatre cavaliers (8 cases disponibles), les quatre cases restantes étant obligatoirement vides (peu importe l'ordre dans lequel on fait les choix, ça ne change rien au résultat), soit $\dbinom{16}{4}\times\dbinom{12}{4}\times\dbinom{8}{4}=\dfrac{16!}{4!^4}=63\ 063\ 000$.
   (e) IL faut choisir les huit cases qui vont être vides parmi les seize cases de l'échiquier, puis, pour chaque case restante, on a trois possibilités de pièces à mettre dessus, ce qui donne $\dbinom{16}{8}\times 8^3=6\ 589\ 440$ possibilités.
   (f) On peut procéder ligne par ligne : sur la première ligne, il faut choisir l'ordre des pièces (la possibilité vide étant ici assimilée à une pièce), ce qui laisse 4! possibilités. Comme on doit

le faire indépendamment pour chacune des quatre lignes, on a donc au total $(4!)^4 = 331\ 776$ positions.

(g) On distingue les cas disjoints suivants, selon le nombre d'apparitions de chaque pièce :

- aucune pièce de chaque type, donc un échiquier complètement vide : un cas.
- une pièce de chaque type : il faut choisir la case où sera l'unique pion, puis celle de l'unique cavalier, puis celle de l'unique tour : $16 \times 15 \times 14 = 3\ 360$ cas.
- deux pièces de chaque type : raisonnement identique à celui de la question d, on obtient $\binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} = \frac{16!}{10! \times 2!^3} = 720\ 720$ cas.
- trois pièces de chaque type : $\binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{3} = \frac{16!}{7!3!^3} = 19\ 219\ 200$ cas.
- quatre pièces de chaque type, on a déjà fait : 63 063 000.
- cinq pièces de chaque type : $\binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{5} = \frac{16!}{5!^3} = 12\ 108\ 096$ cas.

Comme on ne peut pas mettre six pièces de chaque type sans agrandir l'échiquier, on a au total $1 + \frac{16!}{13!} + \frac{16!}{10! \times 2!^3} + \frac{16!}{7! \times 3!^3} + \frac{16!}{4!^4} + \frac{16!}{5!^3} = 95\ 114\ 377$. Oui, tout ça est extrêmement peu probable.

2. On suppose désormais que deux joueurs ayant des pièces de couleurs différentes (l'un a des pièces blanches, l'autre des noires) posent chacun à tour de rôle une pièce sur l'échiquier. Une partie consiste en une suite de coups où un des joueurs pose une pièce sur l'échiquier (aucun déplacement ultérieur des pièces).

(a) L'ordre des coups est ici important (c'est toute la différence avec la question suivante). La seule chose à choisir à chaque coup est la case sur laquelle il va s'effectuer (puisqu'on sait déjà qu'un pion blanc sera posé au premier coup, un pion noir au deuxième etc). Autrement dit, on a simplement à choisir l'ordre des cases sur lesquelles les coups seront joués, soit $16! = 20\ 922\ 789\ 888\ 000$ parties possibles.

(b) Pour la position finalement obtenue, on oublie l'ordre des coups, la seule chose qui compte est l'emplacement des pions noirs et blancs. Comme il y a huit pions de chaque type, il faut par exemple choisir les cases où sont les huit pions blancs, soit $\binom{16}{8} = 12\ 870$ positions.

(c) Même principe qu'à la première question, mais avec en plus un choix de pièces parmi trois possibles à chaque coup, donc $16! \times 3^{16} = 900\ 657\ 498\ 850\ 357\ 248\ 000$ parties possibles. Pour les curieux, le nombre total de parties possibles au vrai jeu d'échecs est estimé aux alentours de 10^{120}.

Exercice 3

1. Il suffit d'appliquer la définition de la convexité vue en cours avec $t = \frac{1}{2}$ (et donc $1 - t = \frac{1}{2}$) pour obtenir $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$, donc exactement la définition de la mid-convexité.

2. Supposons pour commencer $z \geqslant 0$, donc $2^n z \geqslant 0$ pour tout entier n. On peut alors classiquement encadrer la partie entière : $2^n z - 1 < \lfloor 2^n z \rfloor \leqslant 2^n z$, donc en divisant par $2^n z$, on a $z - \frac{1}{2^n} \leqslant u_n \leqslant z$, et une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure à la convergence de (u_n) vers z. Je ne sais pas pourquoi j'ai supposé $z \geqslant 0$ puisque le raisonnement de façon rigoureusement identique pour les réels négatifs.

3. (a) La propriété P_1 affirme trois choses (l'entier k variant entre 0 et 2 lorsque $n = 1$) : $f(0 \times x + 1 \times y) \leqslant 0 \times f(x) + 1 \times f(y)$ qui est trivial pour toute fonction ; $f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant$

$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$ qui est la définition de la mid-convexité ; et $f(1 \times x + 0 \times y) \leqslant f(x)$ qui est évident. La propriété est donc vraie avec l'hypothèse faite.

(b) Posons $\tilde{x} = \frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y$, alors $\frac{\tilde{x}+y}{2} = \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y + \frac{1}{2}y = \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y$. Il suffit donc d'appliquer la définition de la mid-convexité aux réels $\tilde{x}$ et y pour obtenir l'inégalité demandée (on n'utilise pour l'instant pas l'hypothèse de récurrence).

(c) On a bien sûr très envie d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour majorer le membre de droite qu'on vient d'obtenir par $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y) + f(y)\right) = \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)$, ce qui nous donne exactement l'inégalité à démontrer au rang $n+1$. Il y a tout de même un petit piège : l'hypothèse de récurrence n'est valable que si $k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Si $k \in \{2^n+1, \dots, 2^{n+1}\}$, il faut ruser un peu : dans ce cas, $2^{n+1} - k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Notons $k' = 2^{n+1} - k$ et écrivons $\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y = \frac{2^{n+1} - (2^{n+1} - k)}{2^{n+1}}x + \frac{2^{n+1} - k}{2^{n+1}}y = \frac{k'}{2^{n+1}}y + \left(1 - \frac{k'}{2^{n+1}}\right)x$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence en inversant simplement le rôle de x et y (et avec k' au lieu de k).

4. Soit f continue et mid-convexe, x et y deux réels quelconques et $t \in]0,1[$. On sait (question 2) que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}$ converge vers t. Par ailleurs, puisque $t \in]0,1[$, $\lfloor 2^n t \rfloor$ est un entier compris entre 0 et 2^n. On peut donc appliquer la propriété démontrée en question 3 pour affirmer que, pour tout entier n, $f(u_n x + (1-u_n)y) \leqslant u_n f(x) + (1-u_n)f(y)$. Il suffit à alors de passer cette inégalité à la limite : le membre de droite converge vers $tf(x) + (1-t)f(y)$ (opérations élémentaires sur les limites), et, par continuité de f, celui de gauche tend vers $f(tx + (1-t)y)$, ce qui prouve la convexité de f.

5. La présence de cette question dans la version initiale de l'énoncé n'était due qu'à un égarement de ma part, puisque j'avais cru qu'il existait des contre-exemples simples. Il existe bel et bien des contre-exemples, mais tellement pas simples que je ne suis en fait pas capable de vous en montrer un. D'ailleurs, on peut prouver qu'un tel exemple de fonction mid-convexe mais pas convexe ne serait non seulement pas continue, mais ne serait en fait continue en aucun point, et que sa représentation graphique serait dense dans $\mathbb{R}^2$ (rien que ça, déjà, bon courage pour le visualiser). On a d'ailleurs besoin de l'axiome du choix pour prouver l'existence d'une telle chose...

Problème

A. Étude des polynômes d'Hermite.

1. La relation de récurrence permet de calculer directement $H_1 = X - 0 = X$, $H_2 = X^2 - 1$, $H_3 = X^3 - X - 2X = X^3 - 3X$ et $H_4 = X^4 - 3X^2 - 3X^2 + 3 = X^4 - 6X^2 + 3$.

2. On va bien sûr procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 (et accessoirement jusqu'au rang 4 d'après les calculs de la question précédente). Supposons-la vérifiée au rang n, alors XH_n est un polynôme unitaire de degré $n+1$ et H'_n un polynôme de degré strictement inférieur à n, donc H_{n+1} est unitaire de degré $n+1$ (aucune compensation possible du terme de plus haut degré), ce qui prouve l'hérédité.

3. On démontre très rarement une relation de récurrence par récurrence, mais on va bel et bien procéder ainsi pour cette question. Aurang 0, on a $H'_1 = 1$ et $1 \times H_0 = 1$ donc la formule est vérifiée. Supposons que $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ pour un certain entier n, et essayons de

démontrer que $H'_{n+2} = (n+2)H_{n+1}$. Commençons par écrire que, par définition, $H_{n+2} = XH_{n+1} - H'_{n+1} = XH_{n+1} - (n+1)H_n$ d'après l'hypothèse de récurrence. En dérivant cette relation, on a $H'_{n+2} = H_{n+1} + XH'_{n+1} - (n+1)H'_n$. Or, $H'_n = XH_n - H_{n+1}$ (c'est la définition de la suite écrite autrement), donc $H'_{n+2} = H_{n+1} + XH'_{n+1} - (n+1)XH_n + (n+1)H_{n+1} = (n+2)H_{n+1} + X(H'_{n+1} - (n+1)H_n) = (n+2)H_{n+1}$ puisque $H'_{n+1} = (n+1)H_n$ par hypothèse de récurrence. On a bien prouvé l'hérédité et donc la propriété souhaitée.

4. Les relations coefficients-racines appliquées au polynôme H_4 nous informent que $a+b+c+d = abc+abd+acd+bcd = 0$, et que $ab+ac+ad+bc+bd+cd = -6$ et $abcd = 3$. Comme $0 = (a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = a^2+b^2+c^2+d^2-12$, on a $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$.

   Pour le deuxième calcul, on note A la valeur à calculer et on met tout au même dénominateur pour obtenir $A = \dfrac{a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2}{abcd}$. Le dénominateur est égal à 3, reste à calculer la somme des produits de carrés du numérateur qu'on va noter N. Une méthode pour cela : $36 = (ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 = N + 2(a^2bc+a^2bd+a^2cd+b^2ac+b^2ad+b^2cd+c^2ab+c^2ad+c^2bd+d^2ab+d^2ac+d^2bd+3abcd) = N+2((abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d)-4abcd+3abcd) = N+2(0\times 0-3)$. On en déduit que $N = 36+6 = 42$ (quelle magnifique numérateur), puis que $A = 14$.

5. (a) Il s'agit de l'ensemble des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à 3.

   (b) Supposons donc que $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_iH_i = 0$, soit $a_0 + a_1X + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-3X) = a_3X^3 + a_2X^2 + (a_1-3a_3)X + a_0 - a_2 = 0$. L'annulation de ce polynôme est équivalente à l'annulation de chacun de ses quatre coefficients, ce qui donne immédiatement $a_3 = a_2 = 0$, puis $a_1 = 3a_3 = 0$ et $a_0 = a_2 = 0$.

   (c) C'est évident pour les deux premiers puisque $1 = H_0$ et $X = H_1$. C'est à peine plus dur pour les deux suivants : $X^2 = X^2-1+1 = H_2+H_0$, et $X^3 = X^3-3X+3X = H_3+3H_1$.

   (d) Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, alors $P = aX^3+bX^2+cX+d = a(H_3+3H_1)+b(H_2+H_0)+cH_1+dH_0 = aH_3+bH_2+(c+3a)H_1+(d+b)H_0$, ce qui montre l'existence des quatre réels demandés. On peut par exemple poser $a_0 = d+b$, $a_1 = c+3a$, $a_2 = b$ et $a_3 = a$. Cette écriture est de plus unique, puisque l'égalité $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_iH_i = \sum_{i=0}^{3} b_iH_i$ impliquerait $0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{3}(b_i-a_i)H_i$, ce qui d'après la question b mènerait directement à $b_i = a_i$.

   (e) Vérifions : avec les notations précédentes $a_0 = d+b$, et b_0 est le coeffient de H_0 dans la décomposition de $P^{(0)} = P$, donc par définition $b_0 = a_0$. Ensuite, $a_1 = c+3a$, et b_1 est le coefficient de H_0 dans la décomposition de $P' = 3aX^2+2bX+c$, qui vaut $c+3a$ (somme du coefficient constant et du coefficient de degré 2), donc $b_1 = a_1$. Continuons : $a_2 = b$, et $P'' = 6aX+2b$, donc $b_2 = 2b$, on a bien $a_2 = \dfrac{b_2}{2}$. Enfin, $a_3 = a$, et $P''' = 6a$, donc $b_3 = 6a$, ce qui est également la relation souhaitée.

   (f) Directement avec les formules obtenues pour les coefficients a_i, $P = 2H_0+4H_1+H_2+H_3$.

B. Interpolation d'Hermite.

1. On cherche donc un polynôme de la forme $P = aX+b$ tel que $P(x_1) = a_1$ et $P'(x_1) = b_1$. On doit donc avoir $a = b_1$ (puisque P' est le polynôme constant égal à a), et $b_1x_1+b = a_1$, soit $b = a_1 - b_1x_1$. L'unique solution est le polynôme $P = b_1X + a_1 - b_1x_1$.

2. Dans le cas général, on pose $Q_i = \displaystyle\prod_{j\neq i}\left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$.

(a) Si $k \neq i$, on aura $Q_i(x_k) = 0$ puisqu'il y a un facteur $X - x_k$ dans le produit du numérateur. Si $k = i$, $Q_i(x_i) = 1$ (numérateur et dénominateur se simplifient entièrement).

(b) Il va falloir dériver l'horrible produit définissant Q, ce qui va donner une somme de termes, eux-même faisant intervenir des produits. Pour simplifier la rédaction, intéressons-nous au premier polynôme $Q_1 = \dfrac{(X-x_2)^2(X-x_3)^2\dots(X-x_n)^2}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\dots(x_1-x_n)^2}$. Si on dérive le premier facteur (avec le carré) du numérateur, cela donne $\dfrac{2(X-x_2)(X-x_3)^2\dots(X-x_n)^2}{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\dots(x_1-x_n)^2}$. Cette expression prend pour valeur 0 en x_k si $k \neq 1$ (il reste un facteur annulant le numérateur même pour $k = 2$) et vaut $\dfrac{2}{x_1 - x_2}$ si $k = 1$. De même, dériver le facteur $(X - x_j)^2$ du numérateur donnera une expression qui s'annulera pour tous les entiers k différents de 1, et $\dfrac{2}{x_1 - x_j}$ lorsque $k = 1$. Finalement, on obtient $Q_1'(x_1) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{2}{x_1 - x_j}$, et $Q_1'(x_k) = 0$ si $k \neq 1$. Un calcul absolument identique montrerait plus généralement que $Q_i'(x_k) = 0$ si $k \neq i$, et $Q_i'(x_i) = \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$.

(c) Si on évalue P_0 en x_i, puisque seul Q_i ne s'annule pas (et vaut 1) en x_i, il n'y a qu'un terme dans la somme : $P_0(x_i) = [(1 - Q_i'(x_i)(x_i - x_i))a_i + (x_i - x_i)b_i]Q_i(x_i) = a_i$, la valeur souhaitée. On effectue un calcul similaire après avoir dérivé P_0 : $P_0' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))a_i + (X - x_i)b_i]Q_i' + [-Q_i'(x_i)a_i + b_i]Q_i$. On évalue en x_i en ne conservant que le terme numéro i (tous les autres s'annulent) : $P_0'(x_i) = [(1-0) \times a_i + 0 \times b_i]Q_i'(x_i) + [b_i - a_iQ_i'(x_i)]Q_i(x_i) = a_iQ_i'(x_i) + b_i - a_iQ_i'(x_i) = b_i$, là encore la valeur souhaitée. L'expression de P_0 étant bien sûr polynômiale, on a bien trouvé une solution au problème posé.

3. Si P_1 et P_2 sont deux polynômes de H, ils ont la même valeur en x_i (pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, donc $P_2 - P_1$ admet x_i comme racine. Mais c'est aussi le cas de leurs polynômes dérivés, ce qui prouve que chaque x_i est en fait racine double du polynôme $P_2 - P_1$. Autrement dit, $P_2 - P_1$ est factorisable par $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$, qui est exactement le polynôme T.

4. Chaque polynôme Q_i est de degré $2n - 2$ (il est produit de $n - 1$ facteurs de degré 2). Or, P_0 est obtenu comme somme de produits de ces polynômes de degré $2n - 2$ par des polynômes de degré 1 (oui, le crochet ignoble est un bête polynôme du premier degré), donc est une somme de polynômes de degré $2n - 1$. On en déduit que $d^\circ(P_0) \leqslant 2n - 1$. S'il existait une autre solution P_1 de degré inférieur ou égal à $2n - 1$, la différence $P_0 - P_1$ serait donc elle-même de degré au maximum $2n - 1$. Or, d'après la question précédente, elle est multiple d'un polynôme T qui est de degré $2n$. Elle est donc nulle, ce qui prouve que P_0 est le seul élément de H de degré inférieur ou égal à $2n - 1$ (et donc celui de plus petit degré par la même occasion).

5. Commençons par calculer dans ce cas $Q_{-1} = \left(\dfrac{X-1}{-1-1}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(X-1)^2$, et $Q_1 = \left(\dfrac{X+1}{1+1}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(X+1)^2$. On aura donc $Q_{-1}' = \dfrac{1}{2}(X-1)$ et $Q_1' = \dfrac{1}{2}(X+1)$, d'où $Q_{-1}'(-1) = -1$ et $Q_1'(1) = 1$. On applique alors la formule : $P_0 = [(1+X+1) \times 1 + (X+1) \times (-1)]Q_{-1} + [(1-X+1) \times 0 + (X-1) \times (-2)]Q_1 = Q_{-1} + (2-2X)Q_1 = \dfrac{1}{4}(X-1)^2 + \dfrac{1-X}{2}(X+1)^2 = \dfrac{X-1}{4}(X-1-2(X+1)^2) = \dfrac{(1-X)(2X^2+3X+3)}{4}$.