Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5

MPSI Lycée Camille Jullian

13 janvier 2024

Exercice 1

1. Notons $I = 42\mathbb{Z}$, et vérifions tout ce qu'il y a à vérifier :

   - la somme de deux éléments de I appartient bien à I : si $x = 42k$ et $y = 42k'$, avec k et k' entiers, alors $x + y = 42(k + k')$ est toujours un multiple de 42.
   - 0 est un multiple de 42 donc appartient à I.
   - si $x = 42k$ est un multiple de 42, alors $-x = 42 \times (-k)$ appartient aussi à I, on a donc déjà prouvé que I était un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   - enfin, si x est un entier quelconque et $y = 42k \in I$, alors $xy = 42 \times (xk)$ est bien un élément de I, donc I est un idéal de $\mathbb{Z}$ (tout sous-ensemble de la forme $k\mathbb{Z}$ avec k entier le serait évidemment aussi pour les mêmes raisons ; en fait les idéaux de $\mathbb{Z}$ coïncident avec ses sous-groupes additifs).

   Il s'agit de façon évidente d'un anneau principal, puisque par définition $42\mathbb{Z} = \{42 \times k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Il est donc engendré par 42, mais aussi par -42. Il ne peut pas y avoir d'autres éléments engendrant I que ces deux-là : si $|y| < 42$, c'est un élément qui n'appartient pas à I, et si $|y| > 42$, alors 42 ne peut pas s'écrire sous la forme $y \times k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. B ne risque pas d'être un idéal puisqu'il ne s'agit absolument pas d'un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$: il ne contient pas 0, et n'est accessoirement stable ni par passage à l'opposé (tous ses éléments sont positifs), ni par somme ($4 + 2$ n'est pas une puissance de 2, par exemple). Si I est un idéal contenant B, alors $\forall x \in B$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $xy \in I$. Or $1 \in B$, ce qui suffit à prouver que $\mathbb{Z} \subset I$. Il n'y a donc que l'anneau tout entier qui soit un idéal contenant B.

3. (a) Le fait que $I \subset \sqrt{I}$ est évident (il suffit de prendre $n = 1$ pour tous les éléments appartenant déjà à I pour qu'ils satisfassent la définition de $\sqrt{I}$. En particulier, $0 \in I$, donc $0 \in \sqrt{I}$. La stabilité par passage à l'opposé n'est pas très compliqué : si $x^n \in I$, $x^{2n} \in I$ (puisqu'il s'écrit $x^n \times x^n$, avec le deuxième x^n qui est certainement un élément de A). Or, $(-x)^{2n} = x^{2n}$, donc $-x$ a une puissance appartenant à I, il est bien dans $\sqrt{I}$. La stabilité par produit par un élément de A est également facile : si $x \in A$ et $y \in \sqrt{I}$, il existe un entier n tel que $y^n \in I$, et alors $(xy)^n = x^n y^n \in I$ comme produit d'un élément de A par un élément de I, donc $xy \in \sqrt{I}$. Notez quand même que la relation $(xy)' = x^n y^n$ nécessite que A soit un anneau **commutatif**, ce qui était fort heureusement supposé dans l'énoncé.

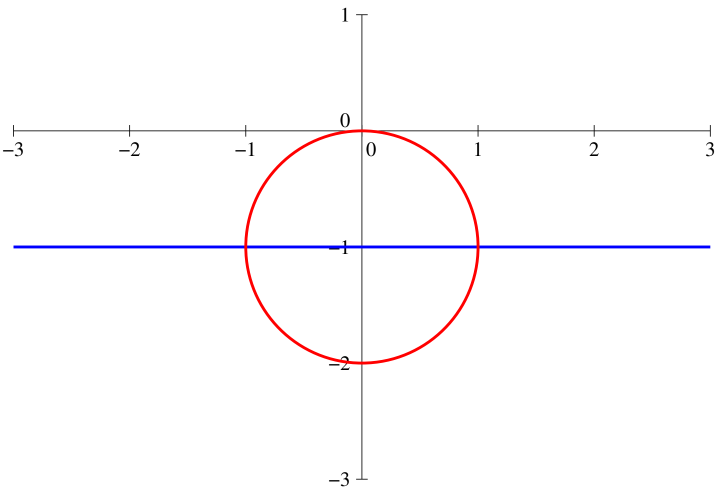
   Reste le plus pénible : la stabilité par somme. Supposons que x et y sont deux éléments vérifiant $x^n \in I$ et $y^k \in I$, et constatons déjà qu'on aura automatiquement $x^k \in I$ pour **toutes** les puissances vérifiant $k \geqslant n$, puisque $x^k = x^n \times x^{k-n}$ est le produit d'un élément de I et d'un élément de A (attention, il est important ici que $k - n$ soit positif, x n'a aucune raison d'être inversible). De même, $y^k \in I$ si $k \geqslant p$. Armé de ces constatations, on calcule alors, à l'aide de la formule du binôme de Newton (tout commute), $(x+y)^{n+p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n}{k} x^k y^{n+p-k}$. Pour toutes les valeurs de k supérieures ou égales à n, comme on vient de le dire, $x^k \in I$. Et si $k < n$, alors $n + p - k > p$, donc $y^{n+p-k} \in I$ (les plus tatillons le feront remarquer que la puissance $n+p-1$ fonctionnait déjà, ce qui est vrai). On a donc pour chacun des termes de la somme $x^k y^{n+p-k} \in I$ (un des deux facteurs est dans I, l'autre dans A). Comme I est un sous-groupe additif de A, les produits par $\binom{n}{k}$ et les sommes d'éléments de I restent des éléments de I, donc $(x+y)^{n+p} \in I$, ce qui prouve que $x+y \in \sqrt{I}$, et achève la preuve que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

(b) On cherche donc des éléments $x \in \mathbb{Z}$ qui ont une puissance multiple de 42. Or, $42 = 2\times3\times7$. Si x n'est pas pair, aucune de ses puissances ne le sera, donc $x \notin \sqrt{42\mathbb{Z}}$. De même, si x n'est pas un multiple de 3, aucune de ses puissances ne le sera, et si x n'est pas multiple de 7, on aura un problème similaire. Les éléments de $\sqrt{42\mathbb{Z}}$ sont donc multiples à la fois de 2, de 3 et de 7, et donc de 42 (on reverra ce genre de propriété dans le chapître d'arithmétique qu'on ne va pas tarder à commencer). Autrement dit, $\sqrt{42\mathbb{Z}} = 42\mathbb{Z}$.

(c) Cette fois-ci c'est différent, car $36 = 2^2 \times 3^2$. Un entier qui n'est pas pair ou multiple de 3 n'a donc aucune chance d'appartenir à $\sqrt{36\mathbb{Z}}$. Par contre, un entier qui est simplement pair et multiple de 3, donc multiple de 6, sera toujours dans ce radical puisque son carré sera un multiple de 36. Autrement dit, $\sqrt{36\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$. On comprend un peu mieux sur cet exemple la notation utilisée pour le radical, même si c'est bien sûr un peu plus compliqué qu'une simple « racine ».

Exercice 2

1. La seule valeur interdite pour f est $z=-i$, pour lequel on aura $\overline{z}=i$ et le dénominateur s'annulera donc. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{C}\backslash\{-i\}$.
2. On pose donc $z = a+ib$ et on calcule simplement $f(z) = \dfrac{1}{a-ib-i} = \dfrac{a+i(b+1)}{a^2+(b+1)^2} = \dfrac{a}{a^2+(b+1)^2} + \dfrac{b+1}{a^2+(b+1)^2}i$.
3. Le calcul précédent montre que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $b+1=0$, donc $b=-1$. Il s'agit de l'équation d'une droite « horizontale » dans le plan complexe (cf dessin après la question 4). Pour être tout à fait rigoureux, il faut supprimer de cette droite le point d'affixe $-i$ correspondant à la valeur interdite.
4. On veut désormais $|f(z)| = 1$. Plutôt que de repartir de la forme algébrique, il est plus simple de remonter à la définition de f pour obtenir la condition $|\overline{z}-i| = 1$, soit $|\overline{z+i}| = 1$. Comme le module d'un complexe et celui de son conjugué sont égaux, on peut dire de façon équivalente que $|z+i| = 1$, et on reconnait simplement la définition du cercle dont le centre a pour affixe $-i$ et de rayon 1.



5. Calculons donc $f(\tan(\theta)) = \dfrac{1}{\tan(\theta) - i} = \dfrac{\tan(\theta) + i}{\tan^2(\theta) + 1}$. On sait tous que $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$, donc $f(\tan(\theta)) = \cos^2(\theta)(\tan(\theta) + i) = \sin(\theta)\cos(\theta) + i\cos^2(\theta)$. Or, $\dfrac{i}{2}(1 + e^{-2i\theta}) = \dfrac{i}{2}(1 + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)) = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) + \dfrac{i}{2}(1 + \cos(2\theta))$. Si on n'a pas complètement oublié ses formules de duplication, on se souvient que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, ce qui donne exactement l'égalité souhaitée.

6. D'après le calcul précédent, $f(\tan(\theta)) - \dfrac{i}{2} = \dfrac{i}{2}e^{-2i\theta}$, donc $\left|f(\tan(\theta)) - \dfrac{i}{2}\right| = \left|\dfrac{ie^{-2i\theta)}}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ (le numérateur étant le produit de deux nombres complexes de module 1), ce qui suffit à prouver l'appartenance de $f(\tan(\theta))$ au cercle demandé.

7. Il faut donc résoudre l'équation $\dfrac{1}{\overline{z} - i} = z$, soit $z\overline{z} - iz = 1$, ou encore $iz = |z|^2 - 1$. Comme $|z|^2 - 1$ est un nombre réel, on doit donc avoir $iz \in \mathbb{R}$, ce qui ne peut se produire que si $z \in i\mathbb{R}$. Posons donc $z = ib$, avec $b \in \mathbb{R}$, l'équation devient alors $-b = b^2 - 1$, donc $b^2 + b - 1 = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et admettant pour racines $b_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $b_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Les deux points fixes de la fonction f sont donc les nombres complexes $z_1 + = b_1 i$ et $z_2 = b_2 i$.

Exercice 3

A. Cas où $\alpha = 0$.

1. La suite constante vérifiant $w_n = 1$ convient. En effet, on aura bien $1 = \dfrac{1 + 1 + 1}{3}$.

2. On calcule donc $u_2 = \dfrac{3 + 2 + 1}{3} = 2$, puis $u_3 = \dfrac{2 + 2 + 1}{3} = \dfrac{5}{3}$, $u_4 = \dfrac{2 + \frac{5}{3} + 1}{3} = \dfrac{14}{9}$ et enfin $u_5 = \dfrac{\frac{5}{3} + \frac{14}{9} + 1}{3} = \dfrac{38}{27}$. On peut soupçonner que la suite va être décroissante, et donc convergente puisqu'elle est trivialement minorée par 0. Avec pas mal de mauvaise foi, on peut éventuellement deviner que cette limite sera égale à 1.

3. La suite (v_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} = 0$, ou si on préfère ne pas avoir de fractions $3x^2 - x - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1 + 12 = 13$ et admet donc deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{13}}{6}$.On peut alors affirmer qu'il existe deux constantes réelles A et B pour lesquelles on aura, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

4. Puisque $3 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$, on peut encadrer les deux racines de la façon suivante : $\dfrac{2}{3} \leqslant r_1 \leqslant \dfrac{5}{6}$, et $-\dfrac{1}{2} \leqslant r_2 \leqslant -\dfrac{1}{3}$. Comme ces deux raisons appartiennent à $]-1, 1[$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_1^n = \lim\limits_{n \to +\infty} r_1^n = 0$, et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5. Supposons donc que $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1} + 1}{3}$, on sait par ailleurs que $w_{n+2} = \dfrac{w_n + w_{n+1} + 1}{3}$. Il suffit de soustraire les deux équations pour en déduire $u_{n+2} - w_{n+2} = \dfrac{u_n - w_n + u_{n+1} - w_{n+1}}{3}$. Le résultat de la question 3 prouve alors que $u_n - 1 = Ar_1^n + r_2^n$, et donc que $u_n = 1 + Ar_1^n + Br_2^n$. En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

B. Cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

1. Pour que (u_n) soit bien définie, il faut qu'on ait toujours $u_n u_{n+1} \geqslant 0$, ce qui sera le cas si tous les termes de la suite sont positifs. Or, cette propriété se prouve par une récurrence double triviale : c'est vrai par hypothèse pour u_0 et u_1 (initialisation double), et en supposant $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant 0$, la relation définissant u_{n+2} prouve immédiatement que $u_{n+2} \geqslant 0$.
2. La suite sera constante égale à u_0. Là encore, on le prouve par récurrence double triviale : l'initialisation est donnée par les hypothèses faites, et si on suppose $u_n = u_{n+1} = u_0$, alors $u_{n+2} = \dfrac{u_0 + u_0 + \sqrt{u_0^2}}{3} = \dfrac{3u_0}{3} = u_0$ (bien sûr, la positivité de u_0 est essentielle pour avoir $\sqrt{u_0^2} = u_0$).
3. (a) En reprenant la relation définissant la suite, $u_{n+2} - u_n = \dfrac{u_{n+1} - 2u_n + \sqrt{u_n u_{n+1}}}{3}$. Or, $(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n}) = u_{n+1} + 2\sqrt{u_{n+1}u_n} - \sqrt{u_n u_{n+1}} - 2u_n = u_{n+1} - 2u_n + \sqrt{u_n u_{n+1}}$, ce qui prouve la relation souhaitée. Comme $\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n}$ est positif, $u_{n+2} - u_n$ est du signe de $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$, qui a lui-même le même signe que $u_{n+1} - u_n$ par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) On sait déjà (hypothèse initiale) que $u_0 \leqslant u_1$. La question précédente, appliquée pour $n = 0$, nous informe que $u_2 - u_0$ et $u_1 - u_0$ ont le même signe, donc que $u_2 \geqslant u_0$. De plus, $u_2 = \dfrac{u_0 + u_1 + \sqrt{u_0 u_1}}{3} \leqslant \dfrac{u_1 + u_1 + \sqrt{u_1^2}}{3} = u_1$ puisque $u_0 \leqslant u_1$. De même, si on applique la question précédente pour $n = 1$, $u_3 - u_1$ a le même signe que $u_2 - u_1$, ici négatif, donc $u_3 \leqslant u_1$. Il ne reste donc plus qu'à prouver que $u_2 \leqslant u_3$. Or, $u_3 = \dfrac{u_1 + u_2 + \sqrt{u_1 u_2}}{3} \geqslant \dfrac{u_2 + u_2 + \sqrt{u_2^2}}{3} = u_2$. On a bien obtenu toutes les inégalités souhaitées.

   (c) On procède par récurrence simple, la propriété à prouver au rang n étant l'enchaînement d'inégalités $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$, donc $u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$. L'initialisation au rang $n = 0$ correspond exactement à ce qui a été démontré à la question précédente. Supposons alors les inégalités vraies au rang n, on doit en déduire que $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4} \leqslant u_{2n+5} \leqslant u_{2n+3}$. L'inégalité $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3}$ est déjà incluse dans l'hypothèse de récurrence, et les autres se démontrent exactement de la même façon qu'à la question précédente : $u_{2n+4} - u_{2n+2}$ est du signe de $u_{2n+3} - u_{2n+2}$, donc positif, ce qui prouve que $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$; de plus, $u_{2n+4} = \dfrac{u_{2n+2} + u_{n+3} + \sqrt{u_{2n+2}u_{2n+3}}}{3} \leqslant u_{2n+3}$ en exploitant l'hypothèse $u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3}$; $u_{2n+5} - u_{2n+3}$ est du signe de $u_{2n+4} - u_{2n+3}$ donc négatif, ce qui prouve que $u_{2n+5} \leqslant u_{2n+3}$; et on démontre $u_{2n+5} \geqslant u_{2n+4}$ par une simple minoration directe similaire aux calculs précédents.

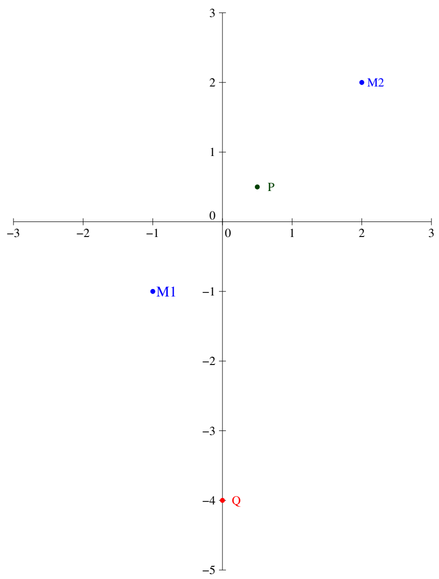
   (d) La suite (v_n) est donc croissante, la suite (w_n) décroissante, et (v_n) est majorée par tous les termes de la suite (w_n), en particulier par w_0, alors que (w_n) est minorée par 0 (ou par v_0 si on veut vraiment un argument symétrique). Le théorème de convergence monotone assure alors la convergence des deux suites.

   (e) Appliquons cette formule pour un entier pair de la forme $2n$: $u_{2n+2} - u_{n+2} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{u_{2n+1}} - \sqrt{u_{2n}})(\sqrt{u_{2n+1}} + 2\sqrt{u_{2n}})$. Notons l la limite de la suite (v_n) et l' celle de la suite (w_n). Puisque le membre de gauche de notre égalité est la différence de deux termes d'indices pairs de la suite (u_n), il converge vers $l - l = 0$. Le membre de droite, lui, converge vers $\dfrac{1}{3}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})(\sqrt{l'} + 2\sqrt{l})$. Si on suppose $l' > l$ (on sait déjà que $l' \geqslant l$ puisque tous les termes de la suite (w_n) sont plus grands que tous ceux de la suite (v_n)), alors $\sqrt{l'} + 2\sqrt{l} > 0$, et la seule possibilité pour que notre limite de droite soit nulle est donc que $\sqrt{l'} - \sqrt{l} = 0$, c'est-à-dire que $l = l'$. On a donc nécessirement deux limites égales, ce qui permet d'en déduire que la suite (u_n) converge elle-même vers cette limite commune. On peut d'ailleurs noter que cette limite commune est nécessairement strictement positive, sauf dans le cas où $u_0 = u_1 = 0$, puisqu'on aura alors $u_2 \leqslant l$ et $u_2 > 0$.

(f) On calcule, de façon similaire à ce qui a été fait en début d'exercice, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \sqrt{u_n u_{n+1}}}{3} - u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2u_{n+1} + \sqrt{u_n u_{n+1}}}{3} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n+1}})(\sqrt{u_n} + 2\sqrt{u_{n+1}})}{3}$ (on a juste inversé le rôle de u_n et de u_{n+1} par rapport au calcul de la question a). Or, $u_{n+1} - u_n = (\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}})(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})$. On peut donc simplifier : $z_n = -\dfrac{\sqrt{u_n} + 2\sqrt{u_{n+1}}}{3(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}})}$, et il ne reste plus qu'à passer à la limite (plus de forme indéterminée) : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = -\dfrac{3\sqrt{l}}{3 \times 2\sqrt{l}} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

1. Il faut donc résoudre l'équation $z^2 - (1+i)z - 4i = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1+i)^2 + 16i = 1 + 2i - 1 + 16i = 18i$. Exceptionnellement, je vais passer par la forme exponentielle pour trouver une racine carrée de ce discriminant : $\Delta = 18e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc on peut prendre $\delta = \sqrt{18}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 3i$, qui vérifie manifestement $\delta^2 = \Delta$. On en déduit les racines $z_1 = \dfrac{1 + i + 3 + 3i}{2} = 2 + 2i$ et $z_2 = \dfrac{1 + i - 3 - 3i}{2} = -1 - i$. Une illustration particulièrement passionnante :



2. Calculons : $\Delta = 4p^2 - 4q = 4p^2\left(1 - \dfrac{q}{p^2}\right)$.
3. Relations classiques, surtout quand le coefficient dominant vaut 1 : $z_1 + z_2 = -(-2p) = 2p$, et $z_1 z_2 = q$.
4. Il faut et il suffit que le discriminant de l'équation soit égal à 0, donc que $q = p^2$.
5. Puisque $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = p$, le milieu de $[M_1M_2]$ est le point P.
6. Les points sont alignés si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right) \equiv 0[\pi]$, donc si z_1 et z_2 ont le même argument modulo π. En notant θ l'argument de l'un des deux, on peut alors écrire $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta}$, avec $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ mais éventuellement l'un des deux « modules » négatif puisque l'égalité des arguments ne se fait que modulo π. On calcule alors, en reprenant les relations

vues précédemment, $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \dfrac{4r_1r_2e^{2i\theta}}{(r_1+r_2)^2e^{2i\theta}} = \dfrac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}$, qui est certainement un nombre réel. De plus, il est plus petit que 1 si et seulement si $4r_1r_2 \leqslant (r_1+r_2)^2 = r_1^2+2r_1r_2+r_2^2$, donc si $r_1^2+r_2^2-2r_1r_2 = (r_1-r_2)^2 \geqslant 0$, ce qui est toujours vrai. On a donc prouvé l'implication « points alignés $\Rightarrow \dfrac{q}{p^2}$ réel et inférieur à 1 ».

Reste bien sûr à traiter la réciproque. Supposons donc que $\dfrac{q}{p^2} \in]-\infty, 1]$, alors $1-\dfrac{q}{p^2}$ est un réel positif, qu'on peut écrire sous la forme a^2, avec $a \in \mathbb{R}$. On a alors $\Delta = 4p^2a^2$, qui admet pour racine carrée $\delta = 2pa$. On en déduit que $z_1 = \dfrac{2p+2pa}{2} = p(1+a)$ et $z_2 = \dfrac{2p-2pa}{2} = p(1-a)$. Les nombres z_1 et z_2 sont donc des produits du même nombre complexe p par des réels ($1+a$ et $1-a$), ce qui prouve que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \equiv \arg(p)[\pi]$. Les points O, M_1 et M_2 sont alors bien alignés.

Pour l'équation de la question 1, on a $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{-4i}{\frac{1}{4}(1+i)^2} = \dfrac{-16i}{2i} = -8$ qui est bien un réel inférieur à 1.

7. C'est le même principe que dans la question précédente, mais avec la condition supplémentaire qu'on doit avoir $r_2 \geqslant 0$. Dans ce cas le quotient $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2}$ reste bien sûr un réel inférieur à 1, mais il est aussi clairement positif, donc $\dfrac{q}{p^2} \in [0,1]$.

   Supposons réciproquement que $\dfrac{q}{p^2} \in [0,1]$. En reprenant à nouveau les calculs de la question précédente, on aura $a^2 \leqslant 1$, donc $a \in [0,1]$ (quitte à le choisir positif). Les facteurs $1+a$ et $1-a$ sont alors tous deux positifs, ce qui prouvent que z_1 et z_2 ont le même argument que p, mais modulo 2π et non plus modulo π. La condition $\dfrac{q}{p^2}$ est donc nécessaire et suffisante.

8. On veut cette fois-ci avoir $|z_1| = |z_2|$, donc $z_2 = z_1e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on peut calculer $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \dfrac{4z_1^2e^{i\theta}}{z_1^2(1+e^{i\theta})^2}$. Quitte à factoriser par l'angle moitié à l'intérieur de la parenthèse du dénominateur, $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4e^{i\theta}}{(e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}))^2} = \dfrac{4}{(2\cos(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{1}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}$, qui est bien réel, mais aussi supérieur ou égal à 1 puisque $\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \in]0,1]$ (on ne peut pas avoir un cosinus nul, sinon on aurait $p=0$, ce qui est exclu par l'énoncé).

   Réciproquement, si $\dfrac{q}{p^2} \in [1,+\infty[$, on a $1-\dfrac{q}{p^2} \leqslant 0$, posons alors $b = \sqrt{\dfrac{q}{p^2}-1}$, qui sera donc un réel positif. On peut alors poser $\delta = 2pib$ de façon à avoir $\delta^2 = \Delta$ (ça marche même dans le cas particulier où le discriminant est nul). On en déduit que $z_1 = \dfrac{2p+2pib}{2} = p(1+ib)$, et de même $z_2 = p(1-ib)$. Les nombres $1+ib$ et $1-ib$ ayant même module (on rappelle que b est réel ici !), ce sera aussi le cas pour z_1 et z_2. La condition $\dfrac{q}{p^2} \in [1,+\infty[$ est donc nécessaire et suffisante pour avoir $|z_1| = |z_2|$.

9. Pour avoir un triangle rectangle isocèle en O, on doit avoir $|z_1| = |z_2|$ mais aussi $\arg(z_2) \equiv \arg(z_1) \pm \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Cela revient en fait à dire que $z_2 = \pm iz_1$. Si $z_2 = iz_1$, alors $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \dfrac{4iz_1^2}{z_1^2(1+i)^2} = \dfrac{4i}{2i} = 2$. Un calcul quasi identique dans le cas où $z_2 = -iz_1$ donne également $\dfrac{q}{p^2} = 2$. Réciproquement, si $\dfrac{q}{p^2} = 2$, $\Delta = -4p^2$, donc on peut poser $\delta = 2pi$, et on a

$z_1 = \dfrac{2p+2pi}{2} = p(1+i)$, et $z_2 = p(1-i)$. comme $i(1-i) = 1+i$, on a bien $z_1 = iz_2$, et le triangle est isocèle rectangle. La condition $\dfrac{q}{p^2} = 2$ est donc nécessaire et suffisante.

10. On veut cette fois-ci avoir $|z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_2) \equiv \arg(z_1) \pm \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Autrement dit, quitte à renuméroter les racines, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1$. On calcule alors $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \dfrac{4z_1^2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{z_1^2(1+e^{i\frac{\pi}{3}})^2}$. Le calcul effectué en question 8 s'applique alors : $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{6})} = \dfrac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$. Réciproquement, si le quotient est égal à $\dfrac{4}{3}$, alors $\Delta = -\dfrac{4}{3}p^2$, on peut donc poser $\delta = \dfrac{2}{\sqrt{3}} ip$, puis on obtient $z_1 = p\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)$ et $z_2 = p\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)$. On vérifie alors que $e^{i\frac{\pi}{3}} \times \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}i + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{3-1}{2\sqrt{3}}i = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$. On a donc $e^{i\frac{\pi}{3}} z_2 = z_1$, et le triangle est bien équilatéral. Encore une fois, la condition obtenue est nécessaire et suffisante.