Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5

MPSI Lycée Camille Jullian

13 janvier 2024

Exercice 1

Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif, un sous-ensemble $I \subset A$ est appelé **idéal** de l'anneau A si I est un sous-groupe de A pour l'addition, et si $\forall x \in A$, $\forall y \in I$, $xy \in I$ (attention, ici on impose bien que le produit d'un élément de I par **n'importe quel élément de** A, et pas seulement par les éléments de I, doit rester dans I). L'idéal I est appelé **idéal principal** s'il existe un élément $y \in I$ tel que $I = \{xy \mid x \in A\}$ (on dit alors que y **engendre** l'idéal principal I).

1. Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, montrer que le sous-ensemble $42\mathbb{Z}$ des multiples de 42 est un idéal. S'agit-il d'un idéal principal ? Si oui, combien d'élements y différents engendrent $42\mathbb{Z}$?
2. L'ensemble $B = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est-il un idéal de $\mathbb{Z}$? Existe-t-il un idéal de $\mathbb{Z}$ (autre que $\mathbb{Z}$ tout entier) contenant l'ensemble B ?
3. Si I est un idéal d'un anneau A, on appelle **radical** de I l'ensemble $\{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$. Cet ensemble est noté $\sqrt{I}$ (oui, je sais, c'est une notation étrange).
   (a) Montrer que $\sqrt{I}$ est lui-même un idéal de A, et que $I \subset \sqrt{I}$.
   (b) Dans $\mathbb{Z}$, déterminer le radical de l'idéal $42\mathbb{Z}$ (comme cette question, comme la suivante, est en lien avec l'arithmétique, des justifications peu rigoureuses pourront être tolérées).
   (c) Toujours dans $\mathbb{Z}$, déterminer le radical de l'idéal $36\mathbb{Z}$ (on ne demande **pas** de vérifier que $36\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$).

Exercice 2

On pose dans cet exercice $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z} - i}$.

1. Quel est le domaine de définition de f (z étant bien sûr une variable complexe) ?
2. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de celle de z.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$. On représentera graphiquement l'ensemble obtenu.
4. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{U}$ (on peut faire cette question pratiquement sans calcul).
5. Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $f(\tan(\theta)) = \dfrac{i}{2}(1 + e^{-2i\theta})$.
6. Déduire de la question précédente que $f(\tan(\theta))$ est situé sur le cercle de rayon $\dfrac{1}{2}$ et dont le centre a pour affixe $\dfrac{i}{2}$.
7. Déterminer les points fixes de la fonction f.

Exercice 3

Dans cet exercice, on s'intéresse à des suites (u_n) vérifiant des relations de récurrence du type $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1} + (u_n u_{n+1})^\alpha}{3}$, où α est un réel positif ou nul fixé.

A. Cas où $\alpha = 0$.

Dans cette partie, la relation de récurrence devient donc $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1} + 1}{3}$.

1. Trouver une suite (w_n) **très** simple vérifiant cette relation de récurrence.
2. Calculer les premiers termes (jusqu'à u_5) de la suite lorsque $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$. Que peut-on conjecturer pour cette suite particulière ?
3. On considère une suite (v_n) vérifiant la relation de récurrence $v_{n+2} = \dfrac{v_n + v_{n+1}}{3}$ (sans le $+1$ au numérateur donc). Reconnaître le type de récurrence et donner une formule pour le terme général de la suite (v_n) (en l'absence de conditions initiales, cette formule ne pourra pas être totalement explicite).
4. Quelle est la limite de ces suites ?
5. Montrer que, si (u_n) vérifie la relation de récurrence « complète » (avec le $+1$ au numérateur), alors $(u_n - w_n)$ vérifie la relation de la question 2. En déduire une expression des suites vérifiant la relation de récurrence complète, et préciser leur limite.

B. Cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

On a donc désormais $u_{n+2} = \dfrac{u_n + u_{n+1} + \sqrt{u_n u_{n+1}}}{3}$. On supposera $u_0 \geqslant 0$ et $u_1 \geqslant 0$.

1. Montrer qu'avec les hypothèses faites, la suite (u_n) est toujours bien définie.
2. On suppose uniquement pour cette question que $u_0 = u_1$. Que peut-on alors dire de la suite (u_n) ?
3. On suppose maintenant que $u_0 < u_1$, et on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que $u_{n+2} - u_n = \dfrac{1}{3}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + 2\sqrt{u_n})$. En déduire que le signe de $u_{n+2} - u_n$ est le même que celui de $u_{n+1} - u_n$.
   (b) Montrer que $u_0 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant u_1$.
   (c) Montrer plus généralement que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$.
   (d) En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent.
   (e) À l'aide de la formule démontrée en question a, montrer que les limites de (v_n) et (w_n) sont égales. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?
   (f) Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = \dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$ (on admet que le dénominateur ne peut pas s'annuler sous l'hypothèse $u_0 < u_1$) converge vers une limite à déterminer.

Exercice 4

On s'intéresse dans ce problème à une équation du second degré du type $z^2 - 2pz + q = 0$ (notée (E)), où p et q sont deux nombres complexes quelconques. On notera z_1 et z_2 les deux solutions (éventuellement égales) de cette équation, et M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixe respective z_1 et z_2. On notera également P et Q les points d'affixe p et q. On suppose dans tout le problème que $p \neq 0$.

1. Déterminer les valeurs de z_1 et z_2 dans le cas où $p = \dfrac{1}{2}(1 + i)$ et $-4i$. On illustrera les résultats obtenus en représentant dans le plan complexe les points M_1, M_2, P et Q dans ce cas particulier.
2. On revient au cas général. Calculer le discriminant Δ de l'équation (E) (on donnera un résultat où apparaît un facteur $1 - \dfrac{q}{p^2}$).
3. Donner la valeur de $z_1 + z_2$ et de $z_1 z_2$ en fonction de p et de q.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour qu'on ait $z_1 = z_2$.
5. Quel est le milieu du segment $[M_1 M_2]$?
6. Montrer que les points O (origine du repère dans le plan complexe), M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si $\dfrac{q}{p^2}$ est un nombre réel inférieur ou égal à 1. Vérifier que c'est le cas dans le cas particulier résolu en question 1.
7. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\dfrac{q}{p^2}$ pour que z_1 et z_2 aient le même argument principal.
8. Montrer que z_1 et z_2 ont le même module si et seulement si $\dfrac{q}{p^2}$ est un nombre réel supérieur ou égal à 1.
9. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\dfrac{q}{p^2}$ pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle isocèle en O.
10. Déterminer une condition sur $\dfrac{q}{p^2}$ pour que ce même triangle OM_1M_2 soit équilatéral.