Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

9 décembre 2023

Exercice 0

Résoudre le système suivant, en distinguant des cas selon les valeurs du paramètre réel m :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & my & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & (m-5)z & = & 7 \end{array}\right.$$

Exercice 1

On souhaite étudier une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$. Le premier terme u_0 est un réel supérieur ou égal à -2.

1. Que se passe-t-il si $u_0 = -2$?
2. En supposant que (u_n) converge vers une limite l, quelles valeurs peut prendre cette limite ?
3. On suppose $u_0 > -2$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -2$.
4. Montrer que $u_n \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant 1$.
5. Étudier la monotonie de la suite (u_n). On distinguera deux cas selon la valeur de u_0.
6. En déduire la nature de la suite (u_n) et sa limite éventuelle (on continuera à distinguer des cas selon la valeur de u_0 si besoin).
7. On pose désormais $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ (en excluant le cas $u_0 = -2$). Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
8. En déduire l'expression explicite de v_n, puis celle de u_n.

Exercice 2

On va donner dans cet exercice plusieurs méthodes différentes pour calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$ (où q est un nombre complexe différent de 1). Les trois premières questions de l'exercice sont complètement indépendantes.

1. Calculer $(q-1)S_n$, et en déduire la valeur de S_n.
2. En posant $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculez la dérivée f' de la fonction f, et en déduire la valeur de S_n.
3. Calculer la somme double $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i+1}^{n} q^k \right)$. En écrivant cette somme double autrement, en déduire la valeur de S_n.
4. Redémontrer par récurrence la formule obtenue pour S_n dans les trois questions précédentes.
5. Calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ (en exploitant les formules obtenues aux questions précédentes).

Problème : étude d'un ensemble de Julia.

On considère dans tout ce problème une suite complexe (z_n) vérifiant la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n + z_n^2$, avec la condition initiale $z_0 = a$, où a est un nombre complexe quelconque. Le but du problème est d'étudier la convergence de la suite (z_n) en fonction de la valeur initiale a. On notera en particulier D le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ constitué des valeurs de a pour lesquelles la suite (z_n) converge. Dans tout le problème, quand on demande la « nature » de la suite, on veut simplement savoir si elle est convergente ou divergente.

A. Quelques généralités.

1. Montrer que, si la suite (z_n) converge, sa limite est forcément nulle.
2. Expliquer pourquoi 0 et -1 appartiennent à l'ensemble D.
3. On suppose dans cette question que a est un réel strictement positif. Montrer dans ce cas que la suite (z_n) est une suite réelle strictement croissante, en déduire qu'on ne peut pas avoir $a \in D$.
4. Montrer que les suites ayant pour condition initiale $z_0 = a$ et $z_0 = -1-a$ ont la même nature (gros indice : calculer les premiers termes de chacune des deux suites). En déduire que, si a est un réel strictement inférieur à -1, la suite diverge.
5. On suppose dans cette question que $a \in]-1, 0[$ (a est donc toujours un réel pour l'instant). Montrer que $a + a^2 \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right[$, puis en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{4} \leqslant z_n < 0$. Démontrer que la suite converge dans ce cas.
6. Déduire des questions précédentes l'ensemble des réels a appartenant à D.
7. En revenant au cas général où a est complexe, montrer que les suites ayant pour condition initiale $z_0 = a$ et $z_0 = \overline{a}$ ont la même nature. Quelle symétrie peut-on en déduire pour l'ensemble D ?
8. Quelle autre symétrie découle du résultat de la question 4 ? Déduire des deux symétries déjà obtenues une troisième symétrie pour l'ensemble D.

B. Un encadrement de l'ensemble D.

On note dans cette partie $E = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -1 < x < 0 \text{ et } -\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Les questions 2, 3 et 4 de cette partie sont enchaînées et reposent toutes sur l'hypothèse $a \in E$. De même, les questions 5, 6 et 7 sont enchaînées et reposent toutes sur l'hypothèse $|a| \geqslant 2$.

1. Montrer soigneusement que, si $z \in E$, alors $z + z^2 \in E$ (on pourra reprendre les résultats de la question $A.5$).
2. On suppose $a \in E$ et on pose, pour tout entier naturel n, $z_n = a_n + ib_n$. Montrer que la suite $(|b_n|)$ est monotone et convergente.
3. En notant l la limite de la suite $(|b_n|)$, montrer par l'absurde que $l = 0$ (on supposera $l \neq 0$ puis on cherchera les valeurs possibles de la limite de la suite (a_n)).
4. Montrer alors que la suite $(|z_n|)$ converge nécessairement, et enfin que $E \subset D$.
5. On suppose maintenant que $|a| \geqslant 2$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \geqslant 2$. Le nombre a peut-il appartenir à l'ensemble D ?
6. Montrer qu'on a en fait, $\forall n \geqslant 1$, $|z_n| > 2$.
7. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = +\infty$ (on pourra minorer $|z_n|$ par le terme général d'une suite géométrique divergente).
8. En s'appuyant sur les questions précédentes et les symétries obtenues dans la partie A du problème, représenter graphiquement deux ensembles F et G tels que $F \subset D \subset G$, F étant le plus grand possible, et G le plus petit possible.
9. Déterminer des équations caractérisant les ensembles $E' = \{z \in \mathbb{C} \mid z + z^2 \in E\}$ et $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + z^2| \geqslant 2\}$ (on ne cherchera **pas** à représenter ces deux ensembles). Expliquer pourquoi $E' \subset D \subset H$, puis généraliser le principe et en déduire une méthode qui permettait d'approcher l'ensemble D de façon de plus en plus précise (probablement avec l'aide d'un ordinateur...).