Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

9 novembre 2023

Exercice 1

1. Si on pose $y(x) = x^k$, alors $y'(x) = kx^{k-1}$ et $y''(x) = k(k-1)x^{k-2}$. La fonction y est donc solution de (E) si $k(k-1)x^k + 3kx^k + x^k = 0$, donc si $(k^2 - k + 3k + 1)x^k = 0$. Pour que cette égalité soit vraie indépendamment de la valeur de x, on doit imposer $k^2 + 2k + 1 = 0$, donc $(k+1)^2 = 0$. La seule valeur de k convenable est donc $k = -1$. Autrement dit, la fonction inverse est solution de (E).

2. (a) Posons plutôt $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$, et dérivons deux fois : $y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}z(x) + \dfrac{z'(x)}{x}$, puis $y''(x) = \dfrac{2}{x^3}z(x) - \dfrac{2}{x^2}z'(x) + \dfrac{z''(x)}{x}$. En eportant dans l'équation (E), on obtient $\dfrac{2}{x}z(x) - 2z'(x) + xz''(x) - \dfrac{3}{x}z(x) + 3z'(x) + \dfrac{1}{x}z(x) = 0$, soit après simplification $xz''(x) + z'(x) = 0$. En notant $v(x) = z'(x)$, on a $xv'(x) + v(x) = 0$, ce qui est bien une équation linéaire d'ordre 1.

   (b) Sur l'intervalle donné, on peut normaliser : $v'(x) + \dfrac{1}{x}v(x) = 0$. La fonction inverse admettant pour primitive la fonction ln sur notre intervalle de résolution, les solutions de cette équation (qui est homogène !) sont les fonctions $v : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \dfrac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   (c) Les fonctions z sont primitives des solutions v de la question précédente, soit $z(x) = K\ln(x) + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ (attention à bien ajouter une deuxième constante ici, on veut toutes les solutions de l'équation), ce qui nous donne donc des solutions de (E) de la forme $y(x) = \dfrac{K\ln(x) + L}{x}$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$. Pas besoin de vérification ici, on a procédé par équivalence tout au long du calcul.

   (d) Si on impose $K \neq 0$ dans l'expresssion de y, le numérateur de la fraction aura une limite infinie en 0 (dépendant du signe de K), et y également. Il faudrait donc avoir $K = 0$, mais si $L \neq 0$, on aura toujours une limite infinie quand x tend vers 0 (dont le signe dépendra cette fois-ci de celui de L). La seule solution étant prolongeable est donc celle obtenue pour $K = L = 0$, c'est-à-dire la solution nulle.

3. (a) Calcul classique : $y'(x) = \dfrac{1}{x}w'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}w'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}w''(\ln(x))$. On reporte dans l'équation (E) pour obtenir l'équation équivalente $-w'(\ln(x)) + w''(\ln(x)) + 3w'(\ln(x)) + w(\ln(x)) = 0$, soit $w''(t) + 2w'(t) + w(t) = 0$.

   (b) L'équation étant déjà homogène, ça va aller très vite : l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet pour racine double $r = -1$, donc les solutions sont les fonctions $w : t \mapsto (A + Bt)e^{-t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}$. On remonte ensuite le changement de variable : $y(x) = w(\ln(x)) = (A + B\ln(x))e^{-\ln(x)} = \dfrac{A + B\ln(x)}{x}$, ce qui correspond bien entendu à la formule trouvée par la première méthode de résolution.

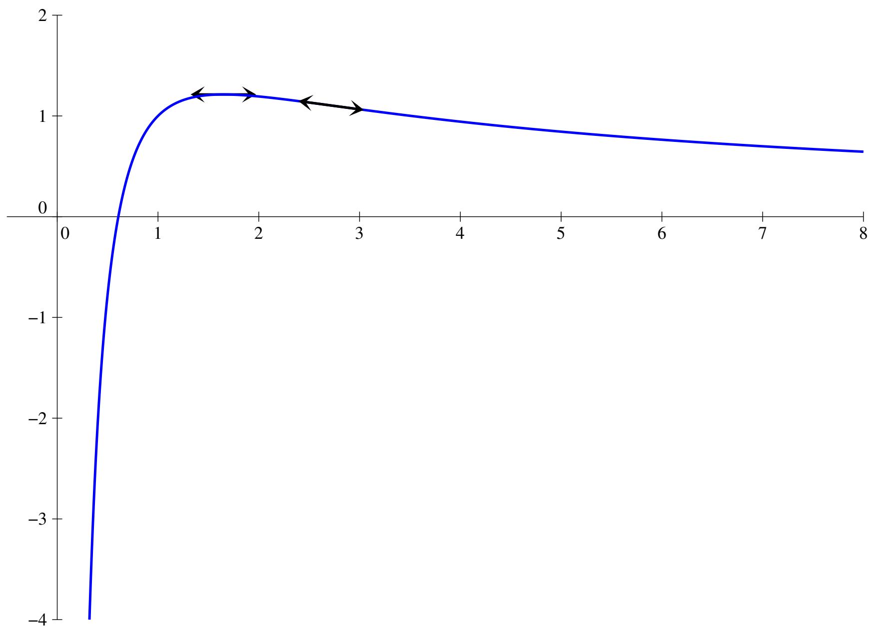
4. En reprenant la formule initiale (avec des constantes K et L), on a $y(1) = L$, donc $y(1) = 1$ impose $L = 1$. De plus, $y'(x) = \dfrac{K - K\ln(x) - L}{x^2}$, donc $y'(1) = K - L$, et $y'(1) = 1$ impose

$K = L + 1 = 2$. La solution recherchée est donc définie par $g(x) = \dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.

5. La fonction g est bien sûr définie, dérivable et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Comme $g(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}$, la croissance comparée permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Aucun problème en 0 où on a $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$. De plus, $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2\ln(x)$, elle s'annule en particulier pour $x = \sqrt{e}$, et g admet en ce point un maximum de valeur $g(\sqrt{e}) = \dfrac{1+1}{\sqrt{e}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$. On rappelle que $\sqrt{e} \simeq 1.65$, donc $\dfrac{2}{\sqrt{e}} \simeq 1.2$. On peut déjà dresser le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0

Passons à l'étude de convexité : $g''(x) = \dfrac{-2x - 2x + 4x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{4(\ln(x) - 1)}{x^3}$, qui est simplement du signe de $\ln(x) - 1$. La fonction g est donc concave sur $]-\infty, e]$ et convexe sur $[e, +\infty[$. Calculons tout de même $g(e) = \dfrac{3}{e}$ pour placer correctement le point d'inflexion sur la courbe que voici :



Exercice 2

1. On a donc $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis $u_2 = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Le reste est immédiat : $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $v_2 = \dfrac{v_1}{u_2} = \dfrac{4}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}$, $w_1 = \dfrac{v_1}{u_1} = \dfrac{1}{u_1^2} = \dfrac{4}{3}$, $w_2 = \dfrac{v_2}{u_2} = \dfrac{v_1}{u_2^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{8}{2\sqrt{3}+3}$. On est tous d'accord sur le fait qu'on n'a pas envie d'essayer de simplifier tout ça.

N'oublions quand même pas la fin de la question : $\arccos(u_0) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, puis $\arccos(u_1) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2. Pour que θ soit bien défini, il faut avoir $u_0 \in [-1, 1]$, ce qui est le cas puisque $v_0 < w_0$. En fait, on sait même que $0 \leqslant u_0 < 1$, ce qui justifie directement que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. On sait que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) > 0$ pour tout entier n. De plus, $\frac{\theta}{2^n} = 2 \times \frac{\theta}{2^{n+1}}$, donc (formule de duplication) $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 1$. Dans l'autre sens, en exploitant la positivité, $\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\theta}{2^n})}{2}}$. Cette formule prouve exactement l'hérédité de la récurrence demandée : si $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, alors $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. L'initialisation étant évidente vu la définition de θ (on a bien $u_0 = \cos(\theta)$), la formule est bien prouvée pour tout entier naturel n.
En particulier, si on reprend $u_0 = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$, on aura $\cos\left(\frac{\theta}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = u_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

4. Notons déjà que $\sin(\theta) \neq 0$, donc les formules proposées ont un sens. De plus, en utilisant une formule de duplication de sinus en cours de route, $v_1 = \frac{v_0}{u_1} = \frac{v_0}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{2v_0 \sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{2v_0}{\sin(\theta)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On procède de même pour la deuxième formule : $v_2 = \frac{v_1}{u_2} = \frac{2v_0 \sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\theta)\cos(\frac{\theta}{4})} = \frac{4v_0 \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{4})}{2\sin(\theta)\cos(\frac{\theta}{4})\sin(\frac{\theta}{4})} = \frac{4v_0}{\sin(\theta)}\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)$.

5. On peut brillamment conjecturer que $v_n = \frac{2^n v_0}{\sin(\theta)} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. On en déduit directement $w_n = \frac{2^n v_0}{\sin(\theta)} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

6. Il faut exploiter la limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ici, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$, donc on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}{\theta} = 1$, ou encore que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \theta$. On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{v_0\theta}{\sin(\theta)}$. Or, $\theta = \arccos(u_0)$ par défition, et comme l'angle θ est dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut affirmer sans problème que $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \sqrt{1 - u_0^2}$.
La formule demandée en découle pour la limite de (v_n). Pour la suite (w_n), c'est exactement le même calcul en exploitant cette fois-ci le fait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$. Alternativement, on peut utiliser le fait que $w_n = \frac{v_n}{u_n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 1$.

7. (a) Puisqu'on a le droit de ne pas être rigoureux, on sait que $u_{n+1} = \frac{v_n}{v_{n+1}}$, donc $z_n = \frac{v_0}{v_1} \times \frac{v_1}{v_2} \times \cdots \times \frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{v_0}{v_n}$ en effectuant les simplifications évidentes (v_n n'est jamais nul, les divisions ne posent donc aucun problème).

(b) En reprenant la limite de (v_n) calculée plus haut, on a simplement $\lim_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = \dfrac{\sqrt{1-u_0^2}}{\arccos(u_0)}$.

(c) On choisit $u_0 = 0$ de façon à avoir $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, et on a alors $u_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, puis $u_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}$ et ainsi de suite, d'où la formule.

Problème.

1. (a) La fonction f est évidemment dérivable, et $f'(t) = n'(t)e^{-rt} - rn(t)e^{-rt} = (n'(t) - rn(t))e^{-rt}$. Or, par hypothèse, $n'(t) = rn(t)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right)$, donc $f'(t) = rn(t)e^{-rt}\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t) - 1\right) = -\dfrac{r}{K}n^2(t)e^{-rt} = -\dfrac{r}{K}n(t)f(t)$. Ainsi, f est bien solution de l'équation demandée.

   (b) L'équation en question est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. Le coefficient $\dfrac{r}{K}n(t)$ admet pour primite $\dfrac{r}{K}N(t)$ (puisque r et K sont simplement des constantes), donc on a $f(t) = Ae^{-\frac{r}{K}N(t)}$, pour une certaine constante $A \in \mathbb{R}$. Avec les notations de l'énoncé, on a donc $g(t) = -\dfrac{r}{K}N(t)$. De plus, la condition $n(0) = n_0$ impose que $f(0) = n_0$, donc avec la formule obtenue, $Ae^{-\frac{r}{K}n_0} = n_0$, soit $A = n_0e^{\frac{r}{K}n_0}$. Ce n'est pas très explicite, mais on ne peut pas faire mieux.

2. (a) Ce n'est pas une équation linéaire.

   (b) Pour cela, il faut absolument que la fonction n ne puisse pas s'annuler dans notre intervalle de résolution. Mais la formule obtenue pour f à la question précédente montre que f est à valeurs strictement positives sur $[0, +\infty[$, donc n aussi. Bien sûr, n étant dérivable, son inverse le sera aussi.

   (c) On calcule $h'(t) = -\dfrac{n'(t)}{n^2(t)} = -\dfrac{r}{n(t)}\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right) = -\dfrac{r}{n(t)} + \dfrac{r}{K} = -rh(t) + \dfrac{r}{K}$. C'est ce qui était demandé.

   (d) Il s'agit à nouveau d'une équation linéaire du premier ordre, mais cette fois-ci elle n'est pas homogène. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $y_h : t \mapsto Ae^{-rt}$, avec $A \in \mathbb{R}$. Pas besoin de variation de la constante ici pour constater que la fontion constante égale à $\dfrac{1}{K}$ est solution particulière. Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions définies par $y(t) = Ae^{-rt} + \dfrac{1}{K}$.

   (e) On sait que h est solution de (E_1) et que $h(0) = \dfrac{1}{n_0}$, donc (avec la formule précédente) $A + \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{n_0}$, soit $A = \dfrac{1}{n_0} - \dfrac{1}{K}$. Autrement dit, $h(t) = \dfrac{1}{n_0}e^{-rt} + \dfrac{1}{K}(1 - e^{-rt})$. Il ne reste plus qu'à passer à l'inverse : $n(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{n_0}e^{-rt} + \frac{1}{K}(1 - e^{-rt})}$. Quitte à multiplier en haut et en bas par n_0e^{rt}, on obtient bien la formule de l'énoncé : $n(t) = \dfrac{n_0e^{rt}}{1 + \frac{n_0}{K}(e^{rt} - 1)}$.

3. (a) En reprenant la formule initialement obtenue pour $n(t)$ (histoire d'éviter la forme indéterminée), $\lim_{t\to+\infty} e^{-rt} = 0$ (on rappelle que la constante r est strictement positive), donc $\lim_{t\to+\infty} n(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{K}} = K$. Le paramèrte K représente donc la population « en régime permanent » du système étudié, qui est indépendante de la population initiale n_0.

(b) Écrivons encore une nouvelle version de l'expression de n : $n(t) = \dfrac{n_0}{e^{-rt} + \frac{n_0}{K}(1 - e^{-rt})} = \dfrac{n_0}{\frac{n_0}{K} + e^{-rt}(1 - \frac{n_0}{K})}$. La fonction $t \mapsto e^{-rt}$ est décroissante, mais elle est multipliée par une constante dont on ne connait pas le signe. Il faut donc distinguer deux cas :

- si $\dfrac{n_0}{K} < 1$, donc si $n_0 < K$, le dénominateur de notre fonction est décroissant (on a multiplié par un nombre positif), et son inverse va donc être croissant. Dans ce cas, la population est croissante à partir de $t = 0$ et tend vers la limite K.
- si $\dfrac{n_0}{K} > 1$, donc si $n_0 > K$, le dénominateur sera croissant et la population va tout le temps décroître et tend bien sûr toujours vers K.
- si n_K, on est dans le cas très particulier où la population va simplement rester toujours constante égale à K.

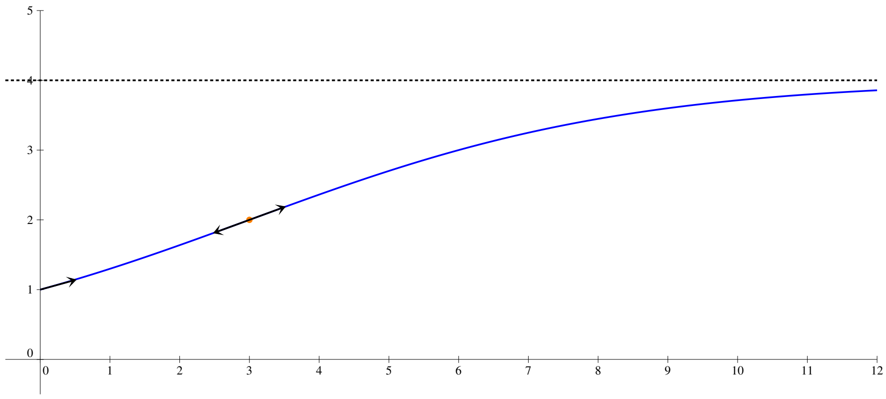
(c) Par hypothèse, $n' = rn\left(1 - \dfrac{n}{K}\right)$, avec par hypothèse n dérivable. La fonction n' est donc elle-même dérivable (et a fortiori continue), et n'' existe donc. Mais comme n est alors de classe (au moins) $\mathcal{C}^1$, le même argument prouvé que n' est aussi $\mathcal{C}^1$ et donc que n est de classe $\mathcal{C}^2$. Bien sûr, on pourrait en fait démontrer que n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On peut donc dériver l'équation différentielle initiale : $n''(t) = rn'(t)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right) - \dfrac{r}{K}n(t)n'(t) = rn'(t) - \dfrac{2r}{K}n'(t)n(t)$. On remplace $n'(t)$ par son expression donnée par l'équation différentielle : $n''(t) = r^2n(t)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right) - \dfrac{2r^2}{K}n^2(t)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right)$
$= r^2n(t)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t)\right)\left(1 - \dfrac{2}{K}n(t)\right)$.

(d) Avec l'hypothèse faite sur n_0 dans cette question et l'étude des variations faite auparavant, on sait que $1 - \dfrac{1}{K}n(t)$ est toujours strictement positif (puisque $n(t)$ croit et tend vers K, donc on a toujours $n(t) < K$). La seule annulation de n'' se produira donc quand $1 - \frac{2}{K}n(t) = 0$, c'est-à-dire quand $n(t) = \dfrac{K}{2}$, ce qui se produira exactement une fois puisque n est bijective à valeurs dans $[n_0, K[$, avec $n_0 < \dfrac{K}{2}$. Remarquons qu'on a déjà répondu à une question ultérieure de l'exercice : par construction, $n(t_0) = \dfrac{K}{2}$.

(e) Puisque $1 - \dfrac{2}{K}n(t) > 0$ si $n(t) < \dfrac{K}{2}$, la fonction n est convexe sur $[0, t_0]$ puis concave sur $[t_0, +\infty[$.

(f) On a déjà signalé que $n(t_0) = \dfrac{K}{2}$. La date t_0 correspond au moment du changement de convexité, c'est-à-dire au moment où n'' devient négative. cela revient bien à dire que la croissance de la population (la dérivée de n) devient décroissante à partir de t_0, donc qu'il y a bien un ralentissement de la croissance (attention à ne pas dire que la population décroît à partir de ce moment, la **population** reste croissante, mais la **croissance de la population** est de moins en moins rapide, alors qu'elle l'était de plus en plus jusque-là). Comme on l'a vu, la valeur limite de la population est égale à K, donc à la date t_0, on a effectivement atteint la moitié de cette population limite.

(g) En $t = 0$, on a $n(0) = n_0 = 1$, et $n'(0) = rn_0\left(1 - \dfrac{1}{K}n_0\right) = \dfrac{3}{4}r$. Sans connaître la valeur de r, on ne peut donc pas savoir précisément l'allure de la courbe (ce qui répond déjà en partie à la toute dernière question du problème). En t_0, on sait que $n(t_0) = \dfrac{K}{2} = 2$, et $n'(t_0) = rn(t_0)\left(1 - \dfrac{1}{K}n(t_0)\right) = 2r \times \dfrac{1}{2} = r$. En fait, on a suffisamment d'informations pour calculer la valeur de r : on sait, en remplaçant K et n_0 par leurs valeurs, que $n(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-rt}}$. Si on veut avoir $n(3) = 2$, cela impose $\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}e^{-3r} = \dfrac{1}{2}$, donc $3e^{-3r} = 1$. Autrement dit, $e^{3r} = 3$ et $r = \dfrac{\ln(3)}{3}$. C'est donc la valeur que j'ai prise pour tracer la courbe suivante (le résultat n'est pas spectaculaire car la convexité est en fait peu marquée) :



4. (a) C'est le calcul que j'ai effectué à la question précédente pour obtenir r : $n(t_0) = \dfrac{K}{2}$, donc $\dfrac{n_0}{\frac{n_0}{K} + e^{-rt_0}(1 - \frac{n_0}{K})} = \dfrac{K}{2}$, ce qui donne $\dfrac{n_0}{K} + e^{-rt_0}\left(1 - \dfrac{n_0}{K}\right) = \dfrac{2n_0}{K}$, donc $e^{-rt_0}\left(\dfrac{K}{n_0} - 1\right) = 1$. Finalement, $e^{rt_0} = \dfrac{K}{n_0} - 1$.

   (b) Sous la forme donnée dans l'énoncé, $n(t) = \dfrac{n_0 e^{rt}}{1 + \frac{n_0}{K}(e^{rt} - 1)}$ est quasiment de la forme $\dfrac{u'}{u}$ (à un facteur constant près), ce qui donnerait une primitive du type $N : t \mapsto \dfrac{K}{r} \ln\left(1 + \dfrac{n_0}{K}(e^{rt} - 1)\right)$. Reste à vérifier la positivité de ce qui est dans le ln, ce qui est en fait évident : $n(t)$ est toujours positif, et sous la forme utilisée, son numérateur est positif de façon évidente, donc son dénominateur aussi.

   (c) On calcule donc $\displaystyle\int_0^{2t_0} n(t)\,dt = N(2t_0) - N(0) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{n_0}{K}(e^{2rt_0} - 1)\right) - \frac{K}{r}\ln(1+0) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{n_0}{K}\left(\left(\frac{K}{n_0} - 1\right)^2 - 1\right)\right) = \frac{K}{r}\ln\left(1 + \frac{n_0}{K}\left(\frac{K^2}{n_0^2} - 2\frac{K}{n_0}\right)\right) = \frac{K}{r}\ln\left(\frac{K}{n_0} - 1\right) = \frac{K}{r}\ln(e^{rt_0}) = Kt_0$. La valeur moyenne est obtenue en divisant la valeur de l'intégrale par la largeur de l'intervalle, ici $2t_0$, ce qui donne bien une valeur moyenne égale à $\dfrac{K}{2}$.

   (d) On sait déjà que $n_1 = \dfrac{K}{2}$, donc $\dfrac{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{K}} = \dfrac{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{K}} = \dfrac{K}{n_0} - 1 = e^{rt_0}$. On a donc bien, en mettant du ln puis en divisant par t_0, $r = \dfrac{1}{t_0}\ln\left(\dfrac{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{K}}\right)$.

   (e) En gros, à K et n_0 fixés, t_0 et r sont inversement proportionnels. En augmentant la valeur de r, on va donc diminuer la valeur de t_0, ce qui revient à dire que l'évolution de la population vers sa situation d'équilibre sera plus rapide. Au contraire, si on diminue la valeur de r, l'évolution sera plus lente.