Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 4

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 5 décembre 2023

Exercice 1

On définit dans tout cet exercice une suite de fonctions f_n par $f_n(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \sqrt{x+k}\right) - (2n+1)\sqrt{x}$.

1. Montrer que, pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.
2. Préciser le domaine de définition de la fonction f_n.
3. Effectuer une étude complète de la fonction f_1 (avec la courbe qui va avec, bien entendu).
4. Montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x+k} + \sqrt{x-k} - 2\sqrt{x})$.
5. Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (on pourra exploiter une multiplication par une quantité conjuguée).
6. Montrer que, si $k \leqslant n$, alors $\dfrac{1}{(\sqrt{n+k} + \sqrt{n-k} + 2\sqrt{n})(\sqrt{n^2-k^2} + n)} \geqslant \dfrac{1}{2(\sqrt{2}+3)n\sqrt{n}}$.
7. En déduire que $f_n(n) \leqslant -\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}+3}$, en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(n)$.
8. Étudier les variations de la fonction f_n (on prouvera en particulier que $\dfrac{1}{2\sqrt{x+k}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quand ça a un sens).

Exercice 2

On suppose une suite de réels finie $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ fixée, et on pose $b_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i$. Le but de l'exercice est d'exprimer les nombres a_k en fonction de ceux de la suite (b_k) (en gros, il s'agit d'inverser la relation initiale, d'où le nom de la formule démontrée en question 2).

1. Dans le cas où $n = 3$, écrire explicitement les quatre relations donnant b_0, b_1, b_2 et b_3 en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3, et résoudre le système obtenu pour exprimer les a_k en fonction des b_k. Que pouvez-vous conjecturer concernant l'expression de a_n en fonction des b_k ?
2. Montrer la formule d'inversion de Pascal : $\forall k \leqslant n$, $a_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j$.
3. Une application : on se donne $n+1$ réels y_0, y_1, …, y_n et on recherche la fonction polynômiale f de plus petit degré vérifiant $f(0) = y_0$, $f(1) = y_1$, …, $f(n) = y_n$ (on verra plus tard dans l'année une généralisation de ce problème).
   On définit par récurrence $\delta^0 y_k = y_k$ (pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$), puis $\delta^h y_k = \delta^{h-1} y_{k+1} - \delta^{h-1} y_k$ quand ça a un sens.
   (a) Calculer toutes les valeurs des $\delta^h y_k$ lorsque $y_0 = 3$, $y_1 = -2$, $y_2 = 1$ et $y_3 = 5$ (on présentera par exemple les résultats sous forme d'une pyramide descendante de valeurs).
   (b) Dans le cas général, exprimer $\delta^3 y_2$ et $\delta^4 y_0$.
   (c) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \delta^k y_0 \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ est solution du problème posé.
   (d) Déterminer la fonction f correspondant à $y_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} i^2$. Quelle formule vient-on de redémontrer ?
   (e) Déterminer la fonction f correspondant à $y_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} i^4$.