Devoir Maison n° 2

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 12 octobre 2023

L'énoncé de ce DM est fortement inspiré de questions posées aux récentes éditions du concours Tescia. Pour ceux qui n'en ont jamais entendu parler, sachez que le Tescia est un concours destiné aux élèves de Terminale envisageant une inscription en classes préparatoires, payant et créé par des gens que je n'aime pas pour repérer plus facilement les martiens que les notes du bac (ou du contrôle continu) ne permettent plus de distinguer facilement des « simples bons élèves » (il est surtout exploité par quelques lycées privés ou parisiens hyper sélectifs). Bref, le concours en question est constitué de QCM (avec quelques rares questions à rédiger quand même) d'une douzaine de pages à faire en... une heure et demie. Si vous avez trouvé le premier DS un peu long, allez sur le web regarder les sujets de Tescia, ça vous calmera. Évitez par contre de regarder les corrigés, le but est bien sûr de faire ce devoir par vous-même, et je vous demande de toute façon de **justifier** rigoureusement toutes vos réponses.

Exercice 1 : quelques calculs algébriques.

1. Simplifier l'expression du nombre $\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ (on ne veut plus de quotient à la fin).
2. Un triangle équilatéral a une aire de 1 cm^2. Quel est son périmètre ?
3. Si les réels a, b et c vérifient $a^2 + b^2 + c^2 = 35$ et $a + b + c = 7$, que vaut $ab + bc + ca$?
4. Simplifier l'expression $2\left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + (a + b - 1)^2$.
5. Déterminer la somme des solutions de l'équation $\sqrt{x^4 + 1} = \sqrt{2}x^2$.
6. On note $x = \underbrace{11\dots1}_{2n \text{ chiffres}}$ et $y = \underbrace{22\dots2}_{n \text{ chiffres}}$. Montrer que $\sqrt{x - y}$ est un nombre entier.
7. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer qu'au moins l'un des trois réels $a(1 - b)$, $b(1 - c)$ et $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.
8. Déterminer tous les triplets de réels vérifiant les trois équations $z^x = y^{2x}$, $2^z = 2^x$ et $x + y + z = 10$.

Exercice 2 : des ensembles ordonnés.

Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est dit **bien ordonné** si tout sous-ensemble non vide de E admet un minimum.

1. Parmi les ensembles suivants (munis de l'ordre naturel $\leqslant$), précisez lesquels sont bien ordonnés : $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}$, $\{\sqrt{2}, \pi, e, 42\}$.
2. Les énoncés « A est un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}$ » et « A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ » sont-ils équivalents ? Sinon, précisez quelle implication est éventuellement vraie.
3. L'ensemble $A = \left\{\dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est-il bien ordonné ? Qu'en est-il de l'ensemble $B = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$?
4. L'ensemble $C = \left\{\dfrac{n^2 + 1}{2023n + \sin(n) + 1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est-il bien ordonné ?
5. Si A et B sont deux sous-ensembles bien ordonnées de $\mathbb{R}$, $A \cup B$ est-il nécessairement bien ordonné ? Même question pour la différence symétrique $A \Delta B$.
6. On munit pour cette dernière question l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation de divisibilité. Pour cette relation, le sous-ensemble $D = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est-il bien ordonné ? Donner un exemple de sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^*$ qui n'est pas bien ordonné.

Exercice 3 : étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2} - \dfrac{1}{2}$ (relation valable pour tout entier naturel n). On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = u_n^2 + u_n$.

1. Donner les valeurs de u_1, u_2, et les trois premiers termes de la suite v_n.
2. La suite (u_n) est-elle arthmétique ? Géométrique ?
3. Même question pour la suite (v_n).
4. Donner une expression explicite de v_n en fonction de n.
5. En déduire une expression de u_n.
6. La suite (u_n) est-elle monotone ?
7. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).

Exercice 4 : un peu de logique pure.

Vous êtes perdus dans le désert. Vous arrivez à une bifurcation d'où partent deux pistes, une vers la droite et une vers la gauche. Chacune de ces deux pistes mène soit vers une oasis, soit vers un cours de philo en Hypokhâgne. Devant le croisement se tiennent trois sphinx (brillamment numérotés 1, 2 et 3), qui vous affirment les choses suivantes :

- Sphinx 1 : Au moins l'une des deux pistes mène à une oasis.
- Sphinx 2 : La piste de droite mène droit à l'enfer du cours de philo.
- Sphinx 3 : Si la piste de gauche mène à un cours de philo, alors celle de droite mène à une oasis.

Dans chacune des questions suivantes, on fait une hypothèse différente sur les sphinx, et vous devez à chaque fois déterminer à quoi mènent les deux pistes. Il est tout à fait possible qu'on ne puisse pas savoir où mène l'une des deux pistes (ou les deux), voire même que l'hypothèse faite soit tout simplement impossible.

1. Hypothèse : Les trois sphinx disent la vérité.
2. Hypothèse : Le sphinx 1 ment (aucune information sur les deux autres sphinx).
3. Hypothèse : Le sphinx 2 ment (aucune information sur les deux autres sphinx).
4. Hypothèse : Le sphinx 3 ment (aucune information sur les deux autres sphinx).
5. Hypothèse : Les trois sphinx mentent.
6. Hypothèse : Exactement un des trois sphinx dit la vérité (mais on ne sait pas lequel, bien entendu).
7. Hypothèse : Exactement un des trois sphinx ment.