Devoir Maison n° 1 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

12 septembre 2023

Exercice 1

1. Oui, l'opération est très clairement commutative, car les opérations d'addition et de multiplication sur les réels le sont : $b \star a = b + a - ba = a + b - ab = a \star b$. C'est moins évident pour l'associativité, on va donc calculer $(a \star b) \star c = (a + b - ab) \star c = a + b - ab + c - (a + b - ab)c = a + b + c - ab - ac - bc + abc$. On constate facilement que le calcul de $a \star (b \star c)$ donne la même expression, ce qui prouve l'associativité de l'opération. Le deuxième calcul est même superflu : l'expression obtenue pour $(a \star b) \star c$ est manifestement invariante si on échange le rôle des variables a, b ou c, ce qui suffit à assurer qu'on obtiendra toujours cette même expression.
2. Oui, bien sûr, il suffit de prendre $x = 0$: $a \star 0 = a + 0 - a \times 0 = a$ (et de même pour $0 \star a$, de toute façon l'opération est commutative).
3. Pour un réel a fixé, on cherche donc s'il existe un b vérifiant $a + b - ab = 0$ (la vérification dans un sens suffit, toujours à cause de la commutativité). Si c'est le cas, on aura donc $a = b(a - 1)$. Le réel $a = 1$ est le seul pour laquelle cette équation n'a pas de solution (et donc le seul à ne pas avoir de symétrique). Si $a \neq 1$, on a une solution (et donc un symétrique) unique qui est $b = \dfrac{a}{a-1}$. Par exemple, 2 a pour symétrique 2, mais -2 a pour symétrique $\dfrac{2}{3}$.
4. Supposons donc qu'il existe deux éléments neutres e et e' pour notre opération $\star$. Par définition de ce qu'est un élément neutre, comme e est neutre, on doit donc avoir $e \star e' = e'$. Mais comme e' est lui aussi neutre, on doit dans le même temps avoir $e \star e' = e$. On en déduit $e = e'$, ce qui prouve l'unicité de l'éventuel élément neutre. Comme toujours pour prouver une unicité, on a effectué une variante de raisonnement par l'absurde.

Exercice 2

1. On s'empresse de poser $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 + X - 2 = 0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$. On n'oublie pas de « remonter » le changement de variable effectué : on doit avoir $e^x = 1$ ou $e^x = -2$. Cette dernière possibilité n'étant guère crédible, la seule solution est $x = 0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
2. Avant de faire quoi que ce soit avec ces ln, il est fortement conseillé de bien préciser les valeurs de x pour lesquelles cette inéquation a un sens (une sorte de domaine de définition) : ici, il faut que $x + 3$, $2x - 1$ et $x + 1$ soient tous les trois strictement positifs, on va donc restreindre la résolution à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. Sur cet intervalle, l'inéquation est équivalente à $\ln((x+3)(2x-1)) \leqslant \ln(x+1)$, puis par croissance de la fonction ln, à $(x+3)(2x-1) \leqslant x+1$. On développe et on passe tout à gauche pour obtenir l'inéquation équivalente $2x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$, ou encore $x^2 + 2x - 4 < 0$ quitte à tout diviser par 2. Le membre de gauche de cette inéquation a pour discriminant $\Delta = 4 + 8 = 12$ et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1 + \sqrt{3}$

et $x_2 = \dfrac{-2-\sqrt{3}}{12} = -1-\sqrt{3}$. Notre trinôme sera négatif entre ces deux racines, mais comme $x_2 < \dfrac{1}{2}$ et $x_1 > \dfrac{1}{2}$ (puisque $\sqrt{3}-1 \simeq 0.7$), on conserve uniquement $\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}-1\right[$.

3. Plein de possibilités ici, la plus simple étant de dire qu'on doit avoir $\cos^2(2x) = \dfrac{1}{2}$, donc $\cos(2x) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Les angles ayant un cosinus égal à $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont tous les multiples entiers impairs de $\dfrac{\pi}{4}$, ce qu'on peut simplement écrire $2x \equiv \dfrac{\pi}{4}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. Il ne reste plus qu'à diviser tout ça par 2 : $x \equiv \dfrac{\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$. Si vous n'êtes pas très à l'aise avec la manipulation des congruences, on reprendra ces méthodes en détail dans le chapitre qu'on consacrera à la trigonométrie.
4. La fonction $x \mapsto 2^x$ est une fonction strictement croissante, qui ne prend la valeur 16 que pour $x = 4$. Notre équation est donc équivalente à l'équation $x^2+3 = 4$, soit $x^2 = 1$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$.
5. On s'empresse de tout passer à gauche puis au même dénominateur pour obtenir l'inéquation équivalente $\dfrac{-2x^2+3x+2}{2x^2-x-1} < 0$. Il ne reste plus qu'à étudier le signe de tout ça : le numérateur a pour discriminant $\Delta = 9+16 = 25$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3-5}{-4} = 2$ (attention, il sera bien sûr positif entre ces racines puisque son coefficient dominant est négatif), et le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et pour racines $x_3 = \dfrac{1+3}{4} = 1$ et $x_4 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Le fait qu'il y ait une racine commune entre nos deux trinômes fait qu'on pourrait simplifier la fraction, mais ce n'est pas vraiment nécessaire, on peut se contenter d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$-2x^2+3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$.

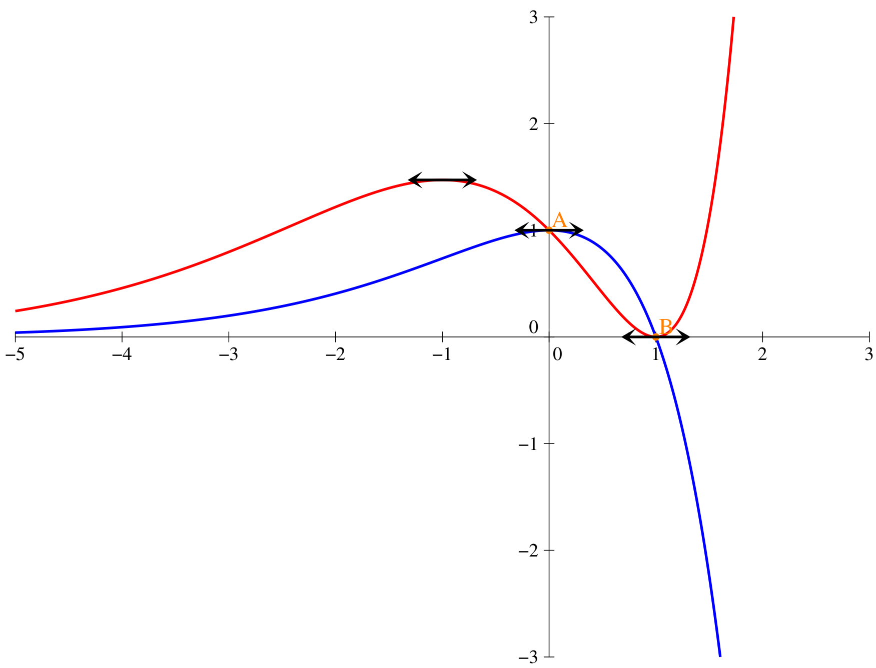
Exercice 3

1. Les fonctions f_1 et f_2 sont bien sûr définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ (et même dérivables deux fois si on est assez courageux pour se lancer dans l'étude de la convexité). On calcule sans problème $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée ici). De l'autre côté, on a besoin des résultats de croissance comparée suivants : quel que soit l'entier naturel n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ (la limite nulle de l'exponentielle l'emporte sur la limite infinie de la puissance), qui permet d'obtenir immédiatement $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$. L'axe des abscisses sera donc asymptote commune aux deux courbes du côté de $-\infty$ (pas d'asymptote de l'autre côté par contre, la croissance de l'exponentielle étant trop forte).
Passons à l'étude des variations : $f_1(x) = (1-x)e^x$, donc $f_1'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, qui est du signe opposé à celui de x. La fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$, avec pour maximum $f_1(0) = 1$. Ensuite, $f_2(x) = (1-x)^2e^x$, donc $f_2'(x) = -2(1-x)e^x + (1-x)^2e^x = (-2+2x+1-2x+x^2)e^x = (x^2-1)e^x$. Cette dérivée est du signe de x^2-1, donc négative uniquement sur l'intervalle $[-1, 1]$. On calcule $f_2(1) = 0$ et $f_2(-1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$ pour obtenir les valeurs des extrema de la fonction. On peut regrouper

toutes les informations déjà obtenues dans un tableau (on a ajouté les valeurs de $f_1(-1) = \frac{2}{e}$, $f_1(1) = 0$ et $f_2(0) = 1$) :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On nous demandait également la position relative des deux courbes, qui s'obtient en étudiant le signe de leur différence : $f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2 e^x - (1-x)e^x = (1-x)(1-x-1)e^x = -x(1-x)e^x$. Cette différence étant du signe de $x(x-1)$, les deux courbes se coupent aux points $A(0,1)$ et $B(1,0)$, ce qu'on savait déjà vu le tableau de variations effectués. De plus, la courbe de f_2 est au-dessus de celle de f_1 sur $[1, +\infty[$ (ce qui était évident) et sur $]-\infty, 0]$ (ce qui l'était moins), et c'est celle de f_1 qui est au-dessus sur l'intervalle $[0, 1]$.
Pour les plus motivés, la convexité pouvait s'étudier : $f_1''(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$ est du signe opposé à celui de $x+1$, la courbe correspondante admet donc un point d'inflexion en -1 (qu'on ne représentera pas précisément sur les courbes qui vont suivre), elle est convexe sur $]-\infty, -1]$ et concave ensuite. Et $f_2''(x) = (2x)e^x + (x^2-1)e^x = (x^2+2x-1)e^x$, expression qui s'annule pour $x = -1-\sqrt{2}$ et $x = -1+\sqrt{2}$. Les valeurs correspondantes de la fonction étant très laides, on s'abstiendra à nouveau de pousser plus loin les calculs. Traçons plutôt pour terminer cette question deux belles courbes tenant évidemment compte de tous les calculs effectués (hors convexité) :



2. Sans difficulté ici, $u_0 = \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$.
3. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x = f_1(x)$. On ne s'y attendait absolument pas. On en déduit $u_1 = \int_0^1 f_1(x) \, dx = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2$.

4. C'est le genre d'intégrale qu'on doit savoir calculer directement. Attention quand même au signe de la primitive, le $1-x$ dans la parenthése ayant pour dérivée -1 : $v_n = \int_0^1 (1-x)^n \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
5. La fonction exponentielle étant croissante, on peut simplement dire que $\forall x \in [0,1]$, $e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$, soit $1 \leqslant e^x \leqslant e$. On peut alors affirmer que $(1-x)^n \leqslant (1-x)^n e^x \leqslant e(1-x)^n$ (le facteur $(1-x)^n$ étant positif sur tout l'intervalle $[0,1]$), puis intégrer ces inégalités sur l'intervalle $[0,1]$ pour obtenir simplement $v_n \leqslant u_n \leqslant ev_n$.
6. On sait déjà que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. Une simple application du théorème des gendarmes permet de conclure : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.