

Devoir Maison n° 11 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

28 mai 2024

Partie A : suites adjacentes.

Question I.

1. C'est une question de cours mal posée, puisque les hypothèses de l'énoncé ne sont pas très claires. Bien sur, si (a_n) est croissante et (b_n) décroissante (donc (b_n) croissante), la suite $(a_n - b_n)$ est croissante comme somme de suites croissantes. Si on suppose en plus qu'elle a une limite nulle (c'est cette hypothèse qui n'est pas claire dans l'énoncé), elle est toujours négative (en effet, s'il existe un entier n_0 tel que $a_{n_0} - b_{n_0} > 0$, la croissance de la suite impliquera que $a_n - b_n > a_{n_0} - b_{n_0} > 0$ pour tout entier $n > n_0$, ce qui contredit la limite nulle de la suite). Par l'absurde, on a bien $a_n \leq b_n$ pour tout entier naturel n .
2. La suite (b_n) étant décroissante, on a toujours $b_n \leq b_0$, et la suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0 , elle converge (théorème de convergence monotone). De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_0 donc converge également. En notant l et l' les limites respectives de (a_n) et de (b_n) , la différence $a_n - b_n$ aura pour limite $l - l'$. Si on considère toujours que cette limite est nulle par hypothèse, on en déduit $l = l'$. L'encadrement $a_n \leq l \leq b_n$ est simplement obtenu par passage à la limite des inégalités $a_n \leq a_p$ (avec $p > n$, n fixé, on fait tendre p vers $+\infty$) et $b_p \leq b_n$.
3. Si les suites sont strictement monotones, $a_n < a_{n+1}$, avec $a_{n+1} \leq l$ (on applique simplement le résultat de la question précédente!), donc $a_n < l$. Même principe pour l'inégalité symétrique.

Question II.

1. Toute cette question est un exercice classique, d'ailleurs présent quasiment sous la même forme dans votre feuille d'exercice du chapitre sur les suites. Ici, il faut bien sûr vérifier les trois conditions habituelles :

- $a_{n+1} - a_n = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
- $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - a_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc la suite (b_n) est décroissante.
- $b_n - a_n = \frac{1}{n \times n!}$ a bien une limite nulle quand n tend vers $+\infty$.

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

2. Cette formule n'est rien d'autre que la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à la fonction exponentielle pour $a = 0$ et $x = 1$ (avec les notations du cours). Mais on va faire semblant de ne pas s'en être rendu compte, et procéder par récurrence comme le suggère l'énoncé (ce qui revient à redémontrer Taylor dans un cas particulier). Tant qu'à faire, on va même le démontrer pour tout entier naturel (pas seulement non nul), puisque ça fonctionne

très bien avec $a_0 = 1$. En effet, $\frac{1}{0!} \int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1 = e - a_0$.

L'initialisation étant faite, on va effectuer une IPP pour le calcul de $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$, en posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$, et donc $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$, et $v'(t) = v(t) = e^t$ (toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$). On obtient alors $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} [(1-t)^{n+1} e^t]_0^1 + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (n+1)(1-t)^n e^t dt$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'intégrale de droite, on a donc $I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + e - a_n = e - a_{n+1}$, ce qui prouve exactement l'hérédité.

3. La positivité de $e - a_n$ découle directement de la positivité sur $[0, 1]$ de la fonction intégrée dans la formule de la question précédente. Pour la majoration, posons donc $f(t) = (1-t)e^t$. La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(t) = -e^t + (1-t)e^t = -te^t \leq 0$, donc f est décroissante sur notre intervalle. En particulier, $f(t) \leq f(0) = 1$. Mieux, cette inégalité est stricte sur tout l'intervalle $]0, 1]$. On en déduit que, sur ce même intervalle, $(1-t)^n e^t \leq (1-t)^{n-1}$, et donc que $e - a_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n!} \left[-\frac{(1-t)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n \times n!}$. L'inégalité est même stricte puisque la fonction $g : t \mapsto (1-t)^{n-1} - (1-t)^n e^t$ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ qui n'est pas identiquement nulle, elle a donc une intégrale strictement positive (théorème vu en cours, le même argument permet d'affirmer que la minoration de $e - a_n$ est également stricte). On en déduit bien que $0 < e - a_n < \frac{1}{n \times n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e - a_n = 0$, et donc que $\lim a_n = e$.
4. L'encadrement précédent montre que, pour avoir une valeur approchée à 10^{-5} près, il suffit (mais ce n'est peut-être pas nécessaire) d'avoir $\frac{1}{n \times n!} < 10^{-5}$, soit $n \times n! > 10^5$, ce qui est le cas pour $n = 8$ puisque $8 \times 8! = 8 \times 40\,320 > 100\,000$.
5. (a) On suppose donc que e peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ (le nombre e étant positif, les entiers p et q le seront aussi). Dans ce cas, $q!e = (q-1)!p$ est certainement un entier naturel.
- (b) On sait déjà que $eq!$ est entier, et chaque terme de la forme $\frac{q!}{p!}$, avec $p \leq q$, l'est aussi (c'est le produit des entiers $(p+1)(p+2) \dots (q-1)q$). Le nombre x est donc une différence d'entiers, c'est un entier. De plus, $e - a_q > 0$ d'après la question 3, donc x est en fait un entier strictement positif (a fortiori un entier naturel).
- (c) On a déjà signalé que $x > 0$. De plus, $e - a_q < \frac{1}{q \times q!}$, donc $x < \frac{1}{q} < 1$. On a même un peu de marge...
- (d) Comme il existe assez peu d'entiers strictement compris entre 0 et 1, on conclut que l'hypothèse faite en début de question est absurde, et que e est donc un nombre irrationnel.

Question III.

1. Il n'y a pas vraiment besoin de connaissances sur les séries entières pour traiter cette question, mais seulement de savoir gérer une série numérique, en l'occurrence un cas bien connu qu'on ne va pas tarder à étudier en cours. Faisons les choses à la main : on sait que la somme d'une suite géométrique est donnée par $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En appliquant cette formule à x plutôt qu'à $-x$, on a donc $\sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$. Cette somme converge si et seulement

si $-x \in]-1, 1[$ (et donc $x \in]-1, 1[$), et dans ce cas, on peut écrire la limite sous la forme $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$. Ce calcul prouve que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est développable en série entière au voisinage de 0 (son développement étant simplement donné par la somme infinie qu'on vient d'écrire), et que le rayon de convergence correspondant est égal à 1.

2. Un théorème que vous verrez l'an prochain affirme que, si une fonction f est développable en série entière, alors sa primitive F qui s'annule en 0 l'est aussi (avec le même rayon de convergence), et que son développement est obtenu en intégrant terme à terme celui de f . Ici, on peut donc simplement « primitiver » l'égalité $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$ pour obtenir $\ln(1+x) =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ égalité valable sur tout l'intervalle ouvert }]-1, 1[.$$

3. On est reparti pour les trois vérifications habituelles :

- $S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = \sum_0^{2n+2} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \sum_0^{2n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$. Or $x^{2n+3} \leq x^{2n+2}$ (on rappelle que $x \in [0, 1]$ pour cette question), et $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{x^{2n+2}}$, donc $\frac{x^{2n+3}}{2n+3} < \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$, ce qui prouve la décroissance de la suite $(S_{2n}(x))$.
- de même, $S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} - \frac{x^{2n+4}}{2n+4} > 0$, donc la suite $(S_{2n+1}(x))$ est croissante.
- enfin, $S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) = -\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$ a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$ (même si $x = 1$, seul cas où le numérateur ne tend pas vers 0, la division par $2n+2$ assure la convergence vers 0).

Les deux sous-suites sont donc bien adjacentes.

4. On connaît déjà la limite commune des deux suites adjacentes de la question précédente lorsque $x < 1$, puisqu'on sait que dans ce cas la suite $(S_n(x))$ toute entière converge vers $\ln(1+x)$. Il suffit donc d'appliquer le résultat de la question I.2 pour en déduire que $S_{2n+1}(x) \leq \ln(1+x) \leq S_{2n}(x)$.
5. On ne peut pas poser $x = 1$ (valeur exclue du raisonnement précédent), mais on peut faire tendre x vers 1. Toutes les fonctions présentes étant continues en 1, l'encadrement souhaité découle alors du précédent.
6. La question 3 assure que nos deux sous-suites convergent vers une même limite l , y compris lorsque $x = 1$. Un passage à la limite dans l'encadrement précédent donne alors les inégalités $l \leq \ln(2)$ et $\ln(2) \leq l$, ce qui impose évidemment $l = \ln(2)$. Et comme les deux sous-suites constituées des termes d'indices pairs et impairs de $(S_n(x))$ convergent vers une même limite, on peut en déduire que $(S_n(x))$ elle-même converge vers l , et donc que $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Partie B : écriture d'un entier en base deux.

Question IV.

1. Tous les coefficients d_k étant par hypothèse positifs ou nuls, N est supérieur ou égal à chacun des termes de la somme le définissant, en particulier, $N > d_{n?1} 2^{n?1} = 2^{n?1}$ puisque $d_{n?1} = 1$.

Par ailleurs, chaque coefficient d_k est majoré par 1, donc $N \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} - 1 = 2^n - 1$ (simple calcul de somme géométrique).

2. Toutes les puissances de 2 intervenant dans la somme définissant N sont des nombres pairs, sauf celle correspondant à $k = 0$. On a donc $N = d_0 2^0 + 2p$, avec $p \in \mathbb{N}$, soit $N = 2p + d_0$, avec $d_0 \in \{0, 1\}$. Cette écriture est une division euclidienne de N par 2 et, cette dernière étant unique, d_0 est donc le reste de cette division.
3. On peut par exemple procéder par récurrence forte sur l'entier N . Pour $N = 0$ et $N = 1$, la suite est unique puisqu'elle ne contient que le chiffre d_0 qui est nécessairement égal à N . Supposons la suite unique pour tous les entiers $k < N$, avec $N \geq 2$, alors, en supposant $N = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$, avec d_0 le reste de la division euclidienne de N par 2, on aura $\frac{N - d_0}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} d_k 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} d_{k+1} 2^k$, qui est la décomposition binaire de l'entier $\frac{N - d_0}{2}$. Cet entier est strictement inférieur à N et possède donc une unique décomposition binaire, ce qui prouve l'unicité de la suite $(d_1, \dots, d_{n-1})$, et donc celle de la suite $(d_0, \dots, d_{n-1})$ pour l'entier N .

Question V.

1. Par définition, on a $y_0 = N$, puis $y_0 = 2y_1 + d_0$, donc $N = 2y_1 + d_0$. À l'étape suivante, $y_1 = 2y_2 + d_1$, donc $N = 4y_2 + 2d_1 + d_0$. Il n'est pas très difficile à partir de là de conjecturer que $N = 2^k y_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i d_i$. On va le prouver par récurrence sur l'entier k . La formule est correcte pour $k = 0$ (et même $k = 1$ et $k = 2$ d'après les remarques préliminaires, supposons-là vérifiée au rang k . On a alors $y_k = 2y_{k+1} + d_k$, donc en repartant de l'hypothèse de récurrence, $N = 2^k y_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i d_i = 2^{k+1} y_{k+1} + 2^k d_k + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i d_i$. Il suffit d'ajouter le $2^k d_k$ comme terme numéro k dans la somme de droite pour avoir la formule au rang suivant, ce qui prouve l'hérédité.
2. Par définition, $y_k \geq 2y_{k+1}$, donc $y_{k+1} \leq \frac{y_k}{2}$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $y_k \leq \frac{y_0}{2^k}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Or, $y_0 = N$, donc $y_k \leq \frac{N}{2^k}$. Comme la suite $\left(\frac{N}{2^k}\right)$ a une limite nulle quand k tend vers $+\infty$, il existe donc un rang à partir duquel $y_k < 1$. Or, y_k est un entier, il est donc nécessairement nul à partir de ce rang. Notons n le plus petit rang à partir duquel tous les entiers y_k sont nuls (ou si on préfère $n - 1$ est le maximum des entiers pour lesquels $y_k > 0$). On a vu à la question précédente que $N = 2^n y_n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i d_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i d_i$ puisque par hypothèse $y_n = 0$. Par ailleurs, comme $y_{n-1} = 2y_n + d_{n-1}$, on a nécessairement $d_{n-1} = 1$ (toujours par hypothèse, $y_{n-1} \neq 0$ et d_{n-1} ne peut être égal qu'à 0 ou 1). On a bien obtenu la décomposition binaire de l'entier N . De plus, $n \geq 1$ car $N \geq 2$ (si $n = 1$, il n'y a qu'un chiffre d_0 dans l'écriture binaire de N , qui est donc égal à 0 ou 1).
3. On applique bêtement l'algorithme précédent pour calculer les valeurs successives de y_k et d_k , en stockant par exemple ces dernières dans une chaîne de caractères (histoire d'afficher le résultat de façon lisible), en faisant quand même gaffe à les retrouver dans le bon ordre (comme souvent, mon Python est assez rudimentaire, vous avez le droit de faire plus élégant si ça vous amuse) :

```
def binaire(N) :
    y,d,s=N,0,"
```

```

while y>0 :
    y,d=y//2,y%2
    s=str(d)+s
return s

```

4. Si on tient vraiment à appliquer l'algorithme pas à pas : $y_0 = 391 = 2 \times 195 + 1$ donc $d_0 = 1$, puis $y_1 = 195 = 2 \times 97 + 1$ donc $d_1 = 1$, $y_2 = 97 = 2 \times 48 + 1$ donc $d_2 = 1$, $y_3 = 48 = 2 \times 24$ donc $d_3 = 0$, $y_4 = 24 = 2 \times 12$ donc $d_4 = 0$, $y_5 = 12 = 2 \times 6$ donc $d_5 = 0$, $y_6 = 6 = 2 \times 3$ donc $d_6 = 0$, $y_7 = 3 = 2 \times 1 + 1$ donc $d_7 = 1$, et $y_8 = 2 \times 0 + 1$, donc $d_8 = 1$ et il est enfin temps de s'arrêter et de conclure : $391 = \overline{110000111}$. Bien sûr, à la main, on obtient ce même résultat plus vite en décomposant directement le nombre comme somme de puissances de 2 : $391 = 256 + 128 + 4 + 2 + 1 = 2^8 + 2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

Question VI.

1. Si on fait les choses vraiment stupidement (en ne stockant même pas les puissances de 2 pour ne pas avoir à les recalculer à chaque fois), on a besoin de k produits pour calculer $d_k 2^k$ ($k-1$ produits par 2 pour obtenir 2^k , et un dernier pour multiplier par d_k), ce qui va donner un nombre total de multiplications égal à $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$. Il faut ajouter à cela $n-1$ additions pour calculer la somme, donc au total $n-1 + \frac{n(n-1)}{2}$ opérations élémentaires (mais ce calcul est débile, les additions étant nettement moins coûteuses en temps que les multiplications en pratique).
2. Il y a une multiplication et une addition dans chaque parenthèse, et une dernière opération de chaque type à l'extérieur de la dernière parenthèse. Comme on a $n-2$ paires de parenthèses, ça nous fait donc $n-1$ additions et autant de multiplications, donc $2n-2$ opérations au total.
3. On va supposer que la suite de chiffres est donnée sous forme de chaîne de caractères, comme la sortie de notre programme précédent, chaîne qu'on va s'empresse de convertir en liste.

```

def Horner(s) :
    l=[int(i) for i in s]
    N=0
    for d in l :
        N=2*N+d
    return N

```

4. Encore une question absolument passionnante. Allez, appliquons Hörner, on calcule successivement 1 , $2 \times 1 + 0 = 2$, puis $2 \times 2 + 1 = 5$, je vous passe les détails, les entiers suivants sont 10 , 20 , 41 , 82 , 164 , 328 , 657 , $1\ 314$, $2\ 628$, $5\ 256$, $10\ 512$, et enfin $N = 21\ 025$. Là, vraiment, on atteint des sommets de question recherchée. Encore une fois, on pouvait faire plus rapide : $N = 2^{14} + 2^{12} + 2^9 + 2^5 + 2^0 = 16\ 384 + 4\ 096 + 512 + 32 + 1 = 21\ 025$.

Partie C : nombres dyadiques.

Question VII.

Tout nombre entier relatif k pouvant s'écrire $\frac{k}{2^0}$, $\mathbb{Z}$ est bien inclus dans D_2 . L'inclusion est évidemment stricte puisque par exemple $\frac{321}{8}$ est un nombre appartenant à D_2 mais pas entier (oui, on a le droit de prendre un exemple moins tordu). L'inclusion $D_2 \subset \mathbb{Q}$ découle immédiatement de la définition de l'ensemble des nombres dyadiques. Pour montrer qu'elle n'est pas stricte, supposons

comme on nous le suggère que $\frac{1}{3} = \frac{a}{2^p}$, avec a impair (quitte à simplifier la fraction de droite, on peut toujours faire cette hypothèse). On aurait donc $2^p = 3a$, ce qui suppose que le membre de gauche de l'égalité est impair (puisque celui de droite est impair comme produit d'entiers impairs), et donc que $p = 0$. Mais alors $a = \frac{1}{3}$ n'est pas vraiment un nombre entier. Notre hypothèse est donc absurde, $\frac{1}{3} \notin D_2$, qui est donc strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.

Question VIII.

1. En isolant le premier terme de la somme, on peut écrire $x - a_0 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$. Le membre de droite de cette égalité est positif comme somme de nombres tous positifs, et on peut le majorer (avec l'hypothèse que les coefficients a_k sont égaux à 0 ou 1), par $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ (calcul de somme géométrique déjà effectué plus haut). On a donc $0 \leq x - a_0 < 1$, ou encore $a_0 \leq x < a_0 + 1$, avec a_0 entier, ce qui est exactement la caractérisation de la partie entière donnée dans le préambule de l'énoncé.

Une fois la valeur de a_0 imposée, il suffit de multiplier l'égalité par 2 et de décaler les indices pour obtenir $2x - 2a_0 = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{2^k}$. Le raisonnement précédent montre alors que $a_1 = E(2x - 2a_0)$. On obtient de même $a_2 = E(4(x - a_0) - 2a_1)$, puis plus généralement, en multipliant l'égalité de départ par 2^k , $a_k = E\left(2^k x - \sum_{i=0}^{k-1} 2^{k-i} a_i\right)$, ce qui prouve l'unicité des coefficients a_k , qui sont à chaque calculables à partir des coefficients précédentes de la liste.

2. Par hypothèse, x est un nombre dyadique positif, donc il existe un entier p tel que $2^p x \in \mathbb{N}$.

D'après les résultats de la partie B, on peut alors écrire cet entier sous la forme $2^p x = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$,

donc $x = \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^{k-p}$. On peut alors découper la somme en $x = \sum_{k=0}^{p-1} d_k 2^{k-p} + \sum_{k=p}^{n-1} d_k 2^{k-p}$. La

deuxième somme est entière, notons a_0 sa somme, on a bien $x = a_0 + \sum_{k=1}^p \frac{d_{p-k}}{2^k}$, écriture qui correspond au développement dyadique souhaité pour x .

3. On a prouvé que tout nombre positif non entier admettait un unique développement dyadique de la forme donnée dans l'énoncé.

Question IX.

Ah, une question sans sous-questions, ça fait du bien, on va peut-être réussir à finir ce sujet de cinq heures en moins de douze heures en faisant un petit effort ! Bon, cette question n'a par ailleurs vraiment aucun intérêt, il faut juste décomposer 35 en binaire, puis diviser par 4, et ça ne demande pas vraiment d'appliquer un quelconque algorithme sophistiqué : $35 = 32 + 2 + 1$, donc $\frac{35}{4} = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Partie D : développement dyadique illimité.

Question X.

1. Il va y avoir besoin pour cette question et quelques-unes des suivantes de quelques vagues notions sur les séries que je donne donc ici en avant-première, avant le cours qu'on va leur

consacrer très bientôt. Une série est simplement une suite définie à l'aide d'une somme : $u_n = \sum_{k=0}^n a_k$, la suite « intérieure » à la somme étant appelée **terme général** de la série.

Dire que la série de terme général a_k converge signifie donc tout simplement que la suite (u_n) correspondante converge vers une limite finie l . Cette limite sera alors appelée **somme** de la série, et souvent notée comme une somme infinie : par définition, $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Bien sûr, cette notation de somme infinie n'a de sens que si la série converge (on évite de l'utiliser si la série admet une limite infinie, même si on se permettra cet abus de notation en cours dans le cadre des familles sommables).

Revenons à nos moutons, et à la question posée : posons donc $u_n = \sum_{k=1}^n a_k 2^{-k}$. La série (u_n) est trivialement croissante comme somme de termes tous positifs (on parle alors de **série à termes positifs**) : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k 2^{-k} - \sum_{k=1}^n a_k 2^{-k} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \geq 0$. La suite étant croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée pour prouver sa convergence. Or, on commence à en avoir l'habitude, $u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$. La suite (u_n) est donc majorée par 1, elle converge.

2. Faisons les choses correctement sans abuser de notations que nous ne maîtrisons pas : si $n \geq N$, $\sum_{k=N}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-N} \frac{1}{2^{k+N}} = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{n-N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^N} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{N-1}} - \frac{1}{2^{n-N}}$, qui converge effectivement quand n tend vers $+\infty$ (avec N fixé) vers $\frac{1}{2^{N-1}}$, ce qu'on peut donc écrire $\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N-1}}$.
3. Cette question est complètement débile, on a déjà prouvé à la question 1 que la série dont $s(a)$ est la limite prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.
4. Si a est une suite dyadique propre, il existe au moins un indice n_0 pour lequel $a_{n_0} = 0$ (il en existe même une infinité en fait). Majorons alors tous les **autres** a_k par 1 : $s(a) \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n_0+1}} < 1$, ce qui prouve l'appartenance demandée.
5. Cette fois-ci, on suppose qu'il existe un entier n_0 à partir duquel tous les a_k sont égaux à 1. On sépare à nouveau la somme en deux : dans ce cas, $s(a) = \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{a_k}{2^k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^{n_0-1}}$. On peut tout même au même dénominateur (2^{n_0-1} convient très bien ici) pour obtenir $s(a) = \frac{b}{2^{n_0-1}}$, avec b entier, donc $s(a)$ est un nombre dyadique.
6. Tous les termes d'indice impair étant nuls, on peut les enlever de la somme. Pour éviter une fois de plus les abus de notation, on va calculer une somme partielle (avant de passer à la limite), en s'arrêtant au terme pair d'indice $2n$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}}$, qui converge vers $s(a) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Question XI.

1. Si x est strictement inférieur à 1, sa partie entière est nul. Par hypothèse, puisqu'il est dyadique, on peut donc l'écrire $x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^k}$, avec les a_k égaux à 0 ou 1 (résultats de la partie C).

Bon, ben voilà, ça répond à la question, il suffit de compléter la suite (a_k) en imposant $a_k = 0$ pour tout entier $k > n$, ce qui constituera manifestement une suite dyadique propre.

2. Si x est non nul, il existe un coefficient a_k non nul dans l'écriture précédente. On isole alors le dernier de ces indices non nuls (pour simplifier, on va reprendre l'écriture précédente en supposant $a_n = 1$, ce qu'on peut toujours faire quitte à ne pas écrire des termes nuls inutiles).

On a alors $x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ d'après les calculs effectués dans la question précédente. On pose donc $b_n = 0$ et $b_k = 1$ pour tout entier $k \geq n+1$ (en conservant $b_k = a_k$ lorsque $k < n$), et on obtient une nouvelle suite dyadique, impropre cette fois-ci, dont la somme est égale à x . C'est exactement le même principe que pour l'écriture décimale des réels : on peut écrire tout réel « correctement » comme nombre décimal en évitant que l'écriture ne se termine par une infinité de chiffres 9, mais on a toujours une deuxième écriture possible avec une infinité de 9 à la fin.

Question XII.

1. Le nombre $\alpha_k(x)$ est évidemment entier comme différence de deux entiers. De plus, $E(2^{k-1}x) \leq 2^{k-1}x$, donc $2E(2^{k-1}x) \leq 2^kx$. Le membre de gauche de l'inégalité étant un entier inférieur ou égal à 2^kx , il est nécessairement plus petit (au sens large) que sa partie entière, donc $2E(2^{k-1}x) \leq E(2^kx)$, ce qui montre que $\alpha_k(x) \geq 0$. De même, $2^{k-1}x < E(2^{k-1}x) + 1$, donc $2^kx < 2E(2^{k-1}x) + 2$. Comme $E(2^kx) \leq 2^kx$, on a donc $\alpha_k(x) < 2$, et comme il s'agit d'un entier, $\alpha_k(x) \leq 1$. Autrement dit, $\alpha_k(x)$ est un entier qui ne peut être égal qu'à 0 ou 1, et la suite correspondante est donc dyadique.
2. Vérifions nos trois propriétés préférées :

- la croissance de $(u_n(x))$ est évidente (somme de termes positifs) : $u_{n+1}(x) - u_n(x) = \alpha_{n+1}(x)2^{-n-1} \geq 0$.
- la décroissance de $(v_n(x))$ l'est à peine moins : $v_{n+1}(x) - v_n(x) = u_{n+1}(x) + \frac{1}{2^{n+1}} - u_n(x) - \frac{1}{2^n} = \frac{\alpha_{n+1}(x)}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\alpha_{n+1}(x) - 1}{2^{n+1}} \leq 0$ (puisque $\alpha_{n+1}(x)$ est égal à 0 ou 1).
- la limite nulle de la différence est vraiment triviale puisque $v_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{2^n}$.

Nos deux suites sont donc adjacentes. On a déjà prouvé un paquet de fois depuis le début de ce corrigé qu'on peut majorer une somme comme celle définissant $u_n(x)$ par $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Cela prouve à la fois que $u_n(x) \leq 1$ mais aussi que $v_n(x) \leq 1$. La positivité des deux suites étant évidente (elles sont définies comme sommes de termes tous positifs), elles sont bien à valeurs dans $[0, 1]$. Le fait que les nombres $u_n(x)$ et $v_n(x)$ soient dyadiques est aussi aux confins de la trivialité (somme finie de fractions dont les dénominateurs sont des puissances de 2, il n'y a qu'à tout mettre sur le dénominateur commun 2^n).

3. Par définition, $u_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{E(2^kx) - 2E(2^{k-1}x)}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{E(2^kx)}{2^k} - \frac{E(2^{k-1}x)}{2^{k-1}}$. On reconnaît une somme télescopique, donc $u_n(x) = \frac{E(2^n x)}{2^n} - \frac{E(2^0 x)}{2^0}$. Le terme de droite étant égal à $E(x) = 0$ (puisque $x \in [0, 1[$ par hypothèse), on en déduit que $u_n(x) = \frac{E(2^n x)}{2^n}$, donc $2^n u_n(x) = E(2^n x)$.

Comme $E(2^n x) \leq 2^n x < E(2^n x) + 1$, on a donc l'encadrement $2^n u_n(x) \leq 2^n x < 2^n u_n(x) + 1$. Il suffit de tout diviser par 2^n pour obtenir $u_n(x) \leq x < v_n(x)$.

4. Les deux suites étant adjacentes, elles ont une limite commune l , qui vérifie d'après la question précédente $l \leq x$ et $x \leq l$ (on passe les inégalités à la limite), donc $l = x$.

5. On sait déjà qu'il s'agit d'une suite dyadique. Supposons par l'absurde que la suite est impropre. Il existe donc un entier n_0 à partir duquel tous les coefficients $\alpha_k(x)$ sont égaux à 1. On

a alors $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k}$ (cette notation est légitime puisqu'on sait que la suite

converge). En découpant à l'endroit de l'indice n_0 , on en déduit que $x = u_{n_0-1}(x) + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} =$

$u_{n_0-1}(x) + \frac{1}{2^{n_0-1}}$ (calcul de somme effectué plus haut dans ce même corrigé). Autrement dit, $x = v_{n_0-1}(x)$, ce qui contredit l'inégalité **stricte** à droite de l'encadrement obtenu à la question 3. Notre suite dyadique est donc une suite propre. L'égalité demandée par l'énoncé a été justifiée en cours de question.

6. L'existence vient d'être prouvée, reste à démontrer l'unicité. Supposons donc que x s'écrit

de deux façons différentes sous forme de développement dyadique : $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^k}$,

avec (a_k) et (b_k) deux suites dyadiques propres distinctes. Il existe donc un entier n_0 tel que, par exemple, $a_{n_0} = 1$ et $b_{n_0} = 0$ (ou inversement, peu importe, l'argument fonctionnera de façon symétrique). Tant qu'à faire, on peut prendre le plus petit entier n_0 pour lequel les

numérateurs sont distincts. En notant $y = \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{b_k}{2^k}$ (par hypothèse, les numérateurs

sont égaux jusqu'à l'indice $n_0 - 1$), on a donc $x = y + \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \geq y + \frac{1}{2^{n_0}}$, et de l'autre

côté $x = y + \frac{0}{2^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^k} < y + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = y + \frac{1}{2^{n_0}}$ (l'inégalité est nécessairement stricte

car la suite dyadique (b_n) étant propre, il « manque » nécessairement des termes pour que la somme puisse être égale à la majoration donnée). Finalement, on obtient l'absurde résultat $x < x$, ce qui montre l'unicité de notre décomposition.

7. D'après les calculs précédents, $d_1 = \alpha_1(x) = E(2x) - 2E(x) = E(2x)$ (la somme d'une suite

dyadique propre est toujours dans l'intervalle $[0, 1[$). De plus, $s(d') = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_{k+1}}{2^k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_k}{2^{k-1}} =$

$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{2^k} - d_1 = 2x - d_1$. Pour obtenir les chiffres du développement de x , il suffit donc de

remplacer, à chaque nouvelle étape, x par $2x - d$, où $d = E(2x)$. Le programme basique suivant fonctionne très bien (la fonction floor de Python étant assez débile pour ne pas fournir un résultat de type entier, on le transforme en entier pour rendre le résultat lisible) :

```
from math import floor
def dyadique(x,n) :
    L=[]
    for i in range(n) :
        d=int(floor(2*x))
        L.append(d)
        x=2*x-d
    return L
```

Question XIII.

On a prouvé dans la question précédente que tout réel de l'intervalle $[0, 1]$ pouvait s'écrire comme limite d'une série (donc d'une suite) dont tous les termes sont des nombres dyadiques. C'est exactement la définition de la densité, donc D_2 est bien dense dans $[0, 1]$. Maintenant, si x est un réel quelconque, $x - E(x) \in [0, 1]$ est limite d'une suite de nombres dyadiques, et il suffit d'ajouter l'entier $E(x)$ à chaque terme de la suite pour obtenir une nouvelle suite de nombres dyadiques convergeant vers x , ce qui prouve la densité de D_2 dans $\mathbb{R}$. Alternativement, on pouvait aussi ne rien utiliser de ce qui précède et démontrer directement que tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient un nombre dyadique, ce qui est assez facile : si on note ε la largeur de l'intervalle, il existe un entier p pour lequel $\frac{1}{2^p} < \varepsilon$, et l'intervalle contiendra alors nécessairement un nombre de la forme $\frac{a}{2^p}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ (détails laissés en exercice au lecteur).

Question XIV.

C'est complètement trivial puisque l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R} \setminus D_2$ (question VII), et qu'il est lui-même dense dans $\mathbb{R}$.

Question XV.

1. La question est très mal posée, puisqu'en autorisant les développements dyadiques impropres on perd l'unicité (demander le développement de $1 - x$ n'a donc pas de sens). Supposons donc $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$, et posons $y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - a_k}{2^k}$. L'écriture qu'on vient de donner pour y est un développement dyadique (propre ou impropre, ça dépend de celui de x ...) puisque les nombres $1 - a_k$ sont des entiers égaux à 0 ou 1, comme les a_k . Or, $x + y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + 1 - a_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, donc $y = 1 - x$. On obtient donc « le » développement de $1 - x$ en remplaçant les 0 par des 1, et inversement, dans celui de x .
2. Bon, là c'est encore plus simple, on se contente de décaler tous les chiffres d'une unité vers la gauche. Autrement dit, on pose $b_k = a_{k+1}$, sachant qu'avec les hypothèses faites on a forcément $a_1 = 0$ (on rappelle que $a_1 = E(2x)$, et ici $2x < 1$). On aura alors $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k+1}}{2^k} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} = 2x$. C'est exactement le même principe pour la multiplication par 2^l , on décale les chiffres de l unités vers la gauche si $l < 0$, et de l unités vers la droite si $l > 0$. Le calcul prouvant ce résultat est le même que celui effectué pour $l = 1$, mais en décalant la somme de l indices au lieu d'un seul.
3. Puisque $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ et qu'on a donné le développement dyadique de $\frac{1}{3}$ à la question X.6, on a $\frac{2}{3} = 0,10101010\dots$ (les a_k sont égaux à 1 si k est impair, à 0 si k est pair).

Partie E : suite extraite de la suite $(\cos(n\pi\theta))_{n \in \mathbb{N}}$.

Question XVI.

1. Les deux premières relations découlent immédiatement des formules de transformations somme-produit que nous connaissons tous par coeur (voyons, où est ma fiche de révisions déjà ? Ah, c'est bon, je l'ai retrouvée) : $\cos((n+1)\pi\theta) + \cos((n-1)\pi\theta)$

$$= 2 \cos \left(\frac{(n+1)\pi\theta + (n-1)\pi\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{(n+1)\pi\theta - (n-1)\pi\theta}{2} \right) = 2 \cos(n\pi\theta) \cos(\pi\theta) = 2c_n \cos(\pi\theta),$$

et $\cos((n+1)\pi\theta) - \cos((n-1)\pi\theta) = -2 \sin \left(\frac{(n+1)\pi\theta + (n-1)\pi\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)\pi\theta - (n-1)\pi\theta}{2} \right) = -2 \sin(n\pi\theta) \sin(\pi\theta) = 2s_n \cos(\pi\theta)$. La dernière formule est simplement la formule classique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, appliquée à $x = n\pi\theta$.

- Si $\theta = 2k\pi$, avec k entier, alors $c_n = \cos(2k\pi\theta) = 1$ et $s_n = \sin(2k\pi\theta) = 0$. En particulier, la suite (c_n) est constante et donc certainement convergente. Supposons réciproquement que la suite (c_n) converge vers un réel l . La première relation prouvée à la question précédente montre alors, en passant à la limite, que $2l = 2l \cos(\pi\theta)$. Si $\cos(\pi\theta) = 1$, alors θ est un multiple pair de π et on est ramenés au cas déjà étudié. Sinon, on a nécessairement $l = 0$. La troisième formule obtenue en question 1 montre alors (toujours en passant à la limite) que (s_n^2) converge vers 1. Or, en exploitant la deuxième relation, $(-2s_n \sin(\pi\theta))$ a une limite nulle (toujours sous l'hypothèse $l = 0$), ce qu'on peut élever au carré pour en déduire que $\lim 4s_n^2 \sin^2(\pi\theta) = 0$, et donc que $\sin^2(\pi\theta) = 0$. Cette valeur constante ne vaut 0 que si $\pi\theta \equiv 0[\pi]$, ce qui nous ramène au cas où θ est un entier pair, qui est donc le seul pour lequel la suite (c_n) converge.

Question XVII.

- Si θ est un nombre dyadique, de la forme $\frac{a}{2^p}$, avec a et p entiers, $2^n\pi\theta$ sera un multiple de 2π à partir du rang $p+1$, donc la suite va stationner à 1 (et donc converger vers 1).
- On peut cette fois-ci écrire $x = \frac{1}{3} + \frac{a}{2^p}$. Quitte à supposer une nouvelle fois que $n \geq p+1$, on a donc $u_n = \cos \left(2^n \left(\frac{1}{3} + \frac{a}{2^p} \right) \pi \right) = \cos \left(\frac{2^n\pi}{3} + 2k\pi \right) = \cos \left(\frac{2^n\pi}{3} \right)$. Or, le cosinus d'un multiple entier de $\frac{\pi}{3}$ peut prendre quatre valeurs selon la congruence modulo 6 de cet entier : $\cos \left(\frac{k\pi}{3} \right) = 1$ si $k \equiv 0[6]$, $\cos \left(\frac{k\pi}{3} \right) = -1$ si $k \equiv 3[6]$, $\cos \left(\frac{k\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ si $k \equiv 1[6]$ ou $k \equiv 5[6]$, et $\cos \left(\frac{k\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ si $k \equiv 2[6]$ ou $k \equiv 4[6]$. Reste donc à déterminer la congruence modulo 6 des puissances de 2, ce qui est très vite fait : $2 \equiv 2[6]$, $2^2 \equiv 4[6]$, $2^3 \equiv 2[6]$, et la suite est ensuite périodique de période 2, ne prenant que les valeurs 2 et 4. On aura donc toujours, à partir du rang $p+1$, $u_n = -\frac{1}{2}$, et la suite stationne (et converge) vers $-\frac{1}{2}$.
- Le même calcul que ci-dessus prouve qu'à partir d'un certain rang, $u_n = \cos \left(\frac{2^{n+1}\pi}{3} \right)$, et la conclusion est la même : stationnement et convergence de la suite vers $-\frac{1}{2}$.
- Le retour des formules de trigo, mais là c'est juste une duplication : $u_{n+1} = \cos(2^{n+1}\pi\theta) = \cos(2 \times 2^n\pi\theta) = 2 \cos^2(2^n\pi\theta) - 1 = 2u_n^2 - 1$.
- Si (u_n) converge vers l , en passant à la limite dans la relation qu'on vient d'obtenir, $l = 2l^2 - 1$, donc $2l^2 - l - 1 = 0$. Même pas besoin de résoudre l'équation en fait, puisqu'on connaît déjà deux valeurs possibles de la limite : $l = 1$ (cf question 1), et $l = -\frac{1}{2}$ (cf questions 2 et 3), qui sont bel et bien solutions de notre équation du second degré, et sont donc les seules limites possibles pour la suite (u_n) .
- Il suffit de découper le développement dyadique en petits morceaux : $\theta - E(\theta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$, donc, si on fixe un entier $n \geq 1$, on aura $2^n\theta = 2^n E(\theta) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k-n}} = 2^n E(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-k} + a_n +$

$\frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_{k+n}}{2^k}$. Voilà qui ressemble beaucoup à ce qui est proposé dans l'énoncé : on pose

$k_n = 2^{n-1}E(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 2^{n-1-k}$, qui est bien un nombre entier, et $\varepsilon_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_{k+n}}{2^k}$, qui peut

être comme d'habitude majoré par $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$, ce qui prouve évidemment que $\varepsilon_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

7. Si on suppose $a_n = a_{n+1}$, la formule précédente permet d'obtenir $u_n = \cos\left(\frac{3a_n\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right)$ (le $2k_n\pi$ étant un multiple pair de π , on peut le faire disparaître du calcul de cosinus). Si a_n et a_{n+1} sont tous les deux nuls, on a même plus simplement $u_n = \cos(\varepsilon_n\pi)$, qui est positif car $0 \leq \varepsilon_n\pi \leq \frac{\pi}{2}$. Si a_n et a_{n+1} sont tous les deux égaux à 1, on se retrouve avec $u_n = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right)$, donc le cosinus d'un angle cette fois-ci compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π . Encore une fois, ce cosinus est positif, on a donc toujours $u_n \geq 0$.

Si $a_n \neq a_{n+1}$, l'un est nul et l'autre égal à 1. Si c'est a_n qui est nul, $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n\pi\right) \leq 0$ (cette fois l'angle est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π). Si c'est a_n qui vaut 1, $u_n = \cos(\pi + \varepsilon_n\pi)$, qui est également négatif.

8. Comme $a_n \neq a_{n+1} \Rightarrow u_n \leq 0$, $u_n > 0 \Rightarrow a_n = a_{n+1}$ (la deuxième implication est la contraposée de la première). Même principe pour le dernier résultat demandé.
9. Une limite strictement positive pour (u_n) ne peut qu'être égale à 1. Dans ce cas, u_n finira par être strictement positive (au moins à partir d'un certain rang), ce qui implique d'après la fin de la question précédente que tous les coefficients a_k sont égaux à partir de ce même rang. Comme la suite (a_k) ne peut pas stationner à une valeur égale à 1 (sinon le développement dyadique correspondant serait impropre), cela signifie que la suite est nulle à partir d'un certain rang, et donc que $\theta - E(\theta)$ est dyadique, donc θ également.

10. C'est le même principe : la limite négative vaut nécessairement $-\frac{1}{2}$, donc $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, ce qui implique qu'à partir de ce rang p (qu'on peut supposer pair quitte à aller un rang trop loin), on a toujours $a_n \neq a_{n+1}$. Si $a_p = 0$, tous les a_k d'indice pair supérieur à p vérifieront $a_k = 0$ et tous les entiers impairs vérifieront $a_k = 1$. Autrement dit,
- $$\theta - E(\theta) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=\frac{p}{2}}^{+\infty} \frac{1}{4^k}.$$
- Comme $\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k}$, la différence $\theta - E(\theta) - \frac{1}{3}$ est un nombre

dyadique (les deux sommes infinies se simplifient pour ne laisser qu'une somme finie), et $\theta - \frac{1}{3}$ est alors un nombre dyadique. Si $a_p = 1$, c'est exactement le même principe, mais cette fois-ci ce sont les termes d'indices impair supérieur à p qui sont égaux à 1, ce qui prouve que $\theta - \frac{2}{3}$ est dyadique.

Question XVIII.

Il n'y a qu'à compiler les résultats des questions précédentes :

- la suite converge vers 1 si et seulement si θ est un nombre dyadique (question 1 pour un sens de l'équivalence, question 8 pour la réciproque).
- la suite converge vers $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $\theta - \frac{1}{3}$ ou $\theta - \frac{2}{3}$ est un nombre dyadique (sens direct aux questions 2 et 3, réciproque à la question 9).

Comme la suite ne peut pas converger vers autre chose que 1 ou $-\frac{1}{2}$, elle converge donc si et

seulement si $\theta = x + \frac{p}{3}$, avec x un nombre dyadique et p entier (si p n'est égal à 0, 1 ou 2, on fait une division euclidienne pour se ramener aux cas étudiés, quitte à rajouter un entier au nombre dyadique x).