Devoir Maison n^{o} 10 : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

2 mai 2024

Problème

I. Intégrales de Wallis.

1. On calcule bien sûr directement $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$, et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Pour la troisième intégrale, le plus rapide est sûrement d'exploiter les formules de duplication : $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, donc $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, puis $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\ dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
2. Allons-y pour un peu de calcul bourrin : $\sin^5(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5it} - 5e^{3it} + 10e^{it} - 10e^{-it} + 5e^{-3it} - e^{-5it}}{32i} = \frac{1}{16}\sin(5t) - \frac{5}{16}\sin(3t) + \frac{5}{8}\sin(t)$, donc $W_5 = \left[\frac{1}{80}\cos(5t) - \frac{5}{48}\cos(3t) + \frac{5}{8}\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{80} - \frac{5}{48} + \frac{5}{8} = \frac{3-25+150}{240} = \frac{128}{240} = \frac{8}{15}$.
3. Puisque $\sin(t) \in [0,1]$ lorsque t varie dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ y est vérifiée, et il suffit de l'intégrer pour en déduire que $W_{n+1} \leqslant W_n$. La suite (W_n) est donc décroissante, et minorée par 0 en tant qu'intégrale d'une fonction positive. Elle converge donc.
4. Pour pouvoir faire une récurrence, il serait bon d'avoir une relation de récurrence entre les différents termes de notre suite. On a pour cela partir du calcul de W_{n+2} et effectuer une IPP un peu bizarre en posant $u(t) = \sin^{n+1}(t)$, donc $u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t)$, histoire de conserver $v'(t) = \sin(t)$ qu'on peut primitiver en $v(t) = -\cos(t)$. On obient alors la relation $W_{n+2} = [-\cos(t)\sin^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)\ dt$. Quitte à remplacer le $\cos^2(t)$ par $1 - \sin^2(t)$ et à développer l'intégrale (le crochet s'annulant), on en déduit $W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\ dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$, dont découle la relation $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ou encore $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$. Il est temps de démontrer par récurrence la première formule : $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. On initialise pour $n = 0$, le membre de droite valant alors $\frac{1\times 1}{1} = 1$, ce qui est bien la valeur calculée plus haut pour W_1. Supposons maintenant la formule vraie au rang n, alors en exploitant la relation de récurrence qu'on vient de démontrer, $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1}$ (attention à bien décaler correctement les valeurs de n). On applique l'hypothèse de récurrence : $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2(n+1))^2 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} =$

$\dfrac{2^{2n+2}(n+1)!^2}{(2n+3)!}$ (on a simplement ajouté un facteur $2n+2$ au numérateur et au dénominateur pour la première étape). C'est bien la formule souhaitée au rang $n+1$, ce qui prouve par récurrence que la formule est balable pour tout entier naturel n. On fait quasiment la même chose pour la deuxième formule. Au rang 0, la formule donne la valeur $\dfrac{\pi}{2}$ qui est bien celle de W_0. Et si on suppose la formule vraie au rang n, alors $W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n+2)!}{(2n+2)^2 2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2}$, soit la formule à obtenir au rang $n+1$.

5. Par récurrence c'est pratiquement trivial avec la relation obtenue au début de la question précédente : $W_0 \times W_1 = \dfrac{\pi}{2}$, et en supposant que $(n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$, alors $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2) \times \dfrac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

   Si on fait un calcul direct, il faut quand même distinguer le cas où n est pair de celui où n est impair. Si $n = 2p$, alors $(2p+1)W_{2p}W_{2p+1} = (2p+1) \times \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2n+1)!}{(2n+1)!} = \dfrac{\pi}{2}$. Le calcul dans le cas impair est quasiment identique, et sans aucun intérêt supplémentaire.

6. On a prouvé plus haut que la suite (W_n) était décroissante, on peut donc affirmer que $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, soit $\dfrac{n+1}{n+2} W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Quitte à tout diviser par W_n, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$. Une application triviale du théorème des gendarmes montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+1}} = 1$.

7. La question précédente prouve que $\dfrac{W_n}{W_{n+1}} \sim 1$. Or, $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. On peut multiplier ces deux équivalents pour obtenir $W_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$, ce qui donne $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (on peut passer un équivalent à n'importe quelle puissance fixe, et W_n est bien sûr toujours positif). Or, $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}} \times \dfrac{(2n)!}{n! \times n!} = \dbinom{2n}{n} \times \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$. Puisque $W_{2n} \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, on en déduit directement que $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} = \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$.

II. Formule de Stirling améliorée.

1. Sur l'intervalle $[i, i+1[$, on a $\lfloor t \rfloor = i$ (avec $i \in \mathbb{N}$). Les valeurs aux bords de l'intervalle d'intégration n'ayant aucune influence sur le calcul de l'intégrale, on peut appliquer la relation de Chasles : $\displaystyle\int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} \frac{i}{t}\,dt = \sum_{i=1}^{n-1} [i\ln(t)]_i^{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} i\ln(i+1) - i\ln(i) = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)\ln(i+1) - i\ln(i) - \sum_{i=1}^{n-1} \ln(i+1) = n\ln(n) - \sum_{i=2}^{n} \ln(i) = n\ln(n) - \ln(n!)$.

2. On en déduit que $I_n = \displaystyle\int_1^n 1 - \frac{1}{2t}\,dt - n\ln(n) + \ln(n!) = n - 1 - \frac{1}{2}\ln(n) - n\ln(n) + \ln(n!)$, soit la formule annoncée dans l'énoncé.

3. Commençons par simplifier $I_{n+1} - I_n = \ln((n+1)!) - (n+1)\ln(n+1) + n - \dfrac{1}{2}\ln(n+1) - \ln(n!) + n\ln(n) - n + \dfrac{1}{2}\ln(n) + 1 = \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n) - \dfrac{1}{2}\ln(n+1) + \dfrac{1}{2}\ln(n) + 1 =$

$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+1.$

Or, $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1+x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2n+1+x-(2n+1)}{2n+1+x}\,dx=\frac{1}{2}[x-(2n+1)\ln(2n+1+x)]_{-1}^{1}=$ $1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n+2)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n)=1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=I_{n+1}-I_n.$

Calcul similaire pour la deuxième intégrale : $-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1-x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2n+1-x-(2n+1)}{2n+1-x}\,dx=$ $\frac{1}{2}[t+(2n+1)\ln(2n+1-x)]_{-1}^{1}=1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(2n+2)$, pour le même résultat. On pouvait d'ailleurs s'éviter ces calculs explicites en étant un peu malin.

4. Additionnant les deux formules qu'on vient de démontrer, $2(I_{n+1}-I_n)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x}{2n+1+x}-\frac{x}{2n+1-x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x(2n+1-x-2n-1-x)}{(2n+1)^2-x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(2n+1)^2-x^2}\,dx$. Il suffit de diviser par 2 pour trouver la formule de l'énoncé.

5. Dans l'intégrale précédente, on peut encadrer le dénominateur sur $[-1,1]$: $(2n+1)^2-1\leqslant(2n+1)^2-x^2\leqslant(2n+1)^2+1$. On peut alors majorer $I_{n+1}-I_n$ par $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(2n+1)^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3(2n)(2n+2)}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{12n(n+1)}$. De l'autre côté, on minore de même $I_{n+1}-I_n$ par $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(2n+1)^2+1}=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3(4n^2+4n+2)}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{12(n^2+n+\frac{1}{2})}$. Or, $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$ est largement supérieur à $n^2+n+\frac{1}{2}$, ce qui montre que $\frac{1}{12(n+1)(n+2)}$ est inférieur à notre minorant, et donc à I_n-I_{n+1}.

6. On vérifie les trois propriétés usuelles :
   - $v_n-u_n=\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}=\frac{1}{12n(n+1)}$ a manifestement une limite nulle.
   - $u_{n+1}-u_n=I_{n+1}-\frac{1}{12(n+1)}-I_n+\frac{1}{12n}=I_{n+1}-I_n+\frac{1}{12n(n+1)}\geqslant 0$ d'après la question précédente, donc la suite (u_n) est croissante.
   - $v_{n+1}-v_n=I_{n+1}-\frac{1}{12(n+2)}-I_n+\frac{1}{12(n+1)}=I_{n+1}-I_n+\frac{1}{12(n+1)(n+2)}\leqslant 0$ toujours d'après la question précédente, donc la suite (v_n) est décroissante.

   Les deux suites sont de monotonie opposée et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

7. Les calculs effectués précédemment montrent que $v_n-u_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$ (c'est en fait équivalent à $\frac{1}{12n^2}$), donc on peut écrire, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement $u_n\leqslant\alpha\leqslant u_n+o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit $I_n-\frac{1}{12n}\leqslant\alpha\leqslant I_n-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou encore $I_n\leqslant\alpha+\frac{1}{12n}\leqslant I_n+o\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui prouve que $I_n=\alpha+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$. Autrement dit, $a=\alpha$ et $b=\frac{1}{12}$.

8. On passe à l'exponentielle dans le calcul de I_n effectué plus haut : $e^{I_n}=\frac{n!e^{n-1}}{n^n\sqrt{n}}$. Autrement dit, on a $n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\times e\sqrt{n}\times e^{I_n}$. Il est temps d'introduire le résultat de la question précédente et de faire un simple développement limité à l'ordre 1 : $n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\times e\sqrt{n}\times e^{\alpha+\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n})}=$

$\left(\frac{n}{e}\right)^n \times e^{1+\alpha}\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. La formule demandée est démontrée, avec $\beta=\alpha+1$.

9. Contentons-nous de l'équivalent découlant de la question précédente : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \times \beta\sqrt{n}$. On en déduit que $(2n)! \sim 2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times \beta\sqrt{2}\sqrt{n}$, puis que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}n^{2n}\beta\times\sqrt{2n}}{e^{2n}} \times \frac{e^{2n}}{n^{2n}\times\beta^2\times n} \sim \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\beta\sqrt{n}}$. Or, on sait déjà que $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$. Une identification des deux formules donne $\frac{\sqrt{2}}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, soit $\beta=\sqrt{2\pi}$. En particulier, on a prouvé l'équivalent de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

III. Pour les fans de Python.

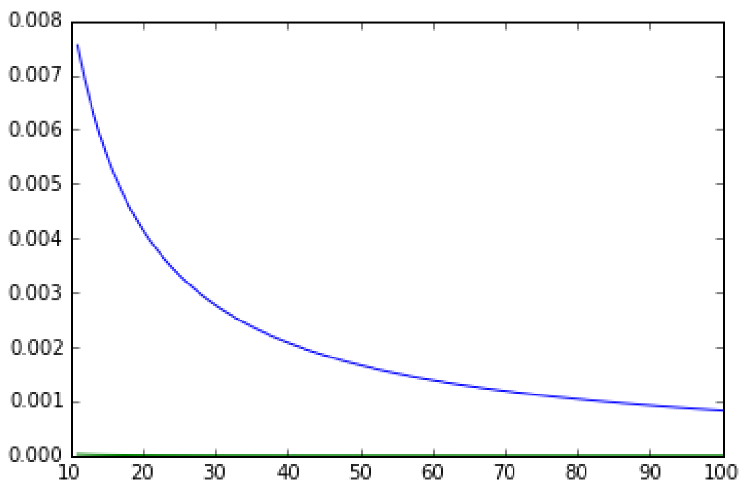
On écrit donc des petits programmes calculant les trois valeurs :

```
def fact(n) :
    p=1
    for i in range(1,n) :
        p*=i+1
    return p

from math import pi,e
def stirling(n) :
    return (2*n*pi)**0.5*(n/e)**n

def stirbis(n) :
    return (2*n*pi)**0.5*(n/e)**n*(1+1/(12*n))
```

Tracer simplement les courbes comparant les différentes valeurs n'a pas grand intérêt, puisque les valeurs des factorielles explosent trop rapidement (on a un gros problème d'échelle. Un exemple tout de même pour illustrer : $100! \simeq 9.3326215 \times 10^{157}$, et la valeur approchée donnée par le programme stirling est de 9.3248×10^{157}, celle du programme stirbis est de $9.3326183 \times 10^{157}$. Pour mieux comparer, le tracé ci-dessous des écarts relatifs entre les deux valeurs approchées et les vraies valeurs des factorielles pour n compris entre 11 et 100 (les résultats de stirbis forment la courbe verte qui est tellement proche de l'axe des abscisses qu'on ne la voit pas vraiment) :



Et un graphique donnant uniquement l'écart relatif obtenu pour ces mêmes valeurs par le programme stirbis :