Devoir Maison n$^{\circ}$ 1

MPSI Lycée Camille Jullian

pour le 11 septembre 2023

Exercice 1

On définit une nouvelle opération sur les réels de la façon suivante : si a et b sont deux réels quelconques, on note $a \star b = a + b - ab$.

1. Cette opération est-elle commutative (ce qui signifierait que, quel que soit le choix des réels a et b, on aurait $a \star b = b \star a$) ? Est-elle associative (ce qui signifierait cette fois que, quels que soient les trois réels a, b et c, on aurait toujours $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$) ?
2. Existe-t-il un élément neutre pour cette opération, c'est-à-dire un réel x vérifiant $a \star x = x \star a = a$ quel que soit le choix du réel a ?
3. En notant e cet élément neutre, quels sont les réels a admettant un symétrique b pour cette opération, c'est-à-dire un deuxième réel tel que $a \star b = b \star a = e$? Ce symétrique peut-il ne pas être unique ?
4. Question bonus : justifier que, si $\star$ est une opération **commutative** quelconque définie sur $\mathbb{R}$ (pas forcément celle étudiée ici), elle ne peut admettre au maximum qu'un seul élément neutre.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
2. $\ln(x+3) + \ln(2x-1) \leqslant \ln(x+1)$
3. $2\cos^2(2x) - 1 = 0$
4. $2^{x^2+3} = 16$
5. $\dfrac{2x^2+x}{2x^2-x-1} < 2$

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = (1-x)^n e^x$. On posera pas ailleurs $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\ dx$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\ dx$.

1. Effectuer une étude la plus complète possible des fonctions f_1 et f_2 (variations, limites, position relative des deux courbes, tracé des courbes).
2. Donner la valeur exacte de u_0.
3. En posant $g(x) = (2-x)e^x$, calculer la dérivée de la fonction g. En déduire la valeur de u_1.
4. Calculer la valeur de v_n en fonction de n.
5. Donner un encadrement de e^x valable sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire un encadrement du type $av_n \leqslant u_n \leqslant bv_n$, où a et b sont deux constantes strictement positives.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).