

# Programme de colle n° 14

MPSI Lycée Camille Jullian

semaine du 17/01 au 21/01 2022

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtimements corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

## Chapitre 10 : Arithmétique.

- Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , **théorème de division euclidienne**, nombres premiers (existence d'une infinité de nombres premiers, crible d'Eratosthène), congruences dans  $\mathbb{Z}$ .
- Pgcd, ppcm (y compris d'une famille d'entiers), notation  $n \wedge p$  et  $n \vee p$ , algorithme d'Euclide, théorèmes de Bézout et de Gauss, entiers premiers entre eux, premiers entre eux dans leur ensemble.
- Valuations  $p$ -adique, additivité des valuations  $p$ -adiques, théorème de décomposition en facteurs premiers, calcul du pgcd et du ppcm à l'aide de la décomposition en facteurs premiers et formule  $(n \wedge p) \times (n \vee p) = n \times p$ , **petit théorème de Fermat**.

## Chapitre 11 : Calcul matriciel.

- Calcul matriciel élémentaire :
  - définition des matrices et notation des ensembles de matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , vocabulaire de base (taille d'une matrice, matrices carrées, diagonales, triangulaires, matrices nulles, matrices identité  $I_n$ )
  - somme de matrices, produit d'une matrice par une constante, combinaisons linéaires de matrices, produit matriciel, propriétés (à savoir démontrer : **le produit d'une matrice  $A$  par une matrice identité de taille compatible est égal à  $A$** )
  - transposition, matrices symétriques et antisymétriques
  - puissances d'une matrice carrée, exemples de calculs de puissances à l'aide de suites récurrentes (typiquement en partant d'une relation du type  $A^2 = aA + bI_3$ ), matrices nilpotentes, formule du binôme de Newton matricielle et exemples
  - trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
  - inversion de matrices : définition, propriétés élémentaires (unicité, inverse d'un produit de matrices inversibles), opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (et interprétation en termes de multiplication à gauche par des matrices de transvection ou de dilatation), algorithme du pivot de Gauss d'inversion d'une matrice (le calcul explicite de l'inverse

peut être présenté au choix sous forme matricielle classique, avec une matrice augmentée, ou en exploitant la résolution d'un système), exemples de calculs d'inverse exploitant un polynôme annulateur de la matrice

- Compléments sur les systèmes linéaires :
  - écriture matricielle d'un système linéaire, résolution d'un système de taille quelconque via l'algorithme du pivot de Gauss (là aussi on pourra effectuer une résolution exploitant une matrice augmentée, ou une résolution « mixte » consistant à triangulariser une matrice augmentée avant de revenir à la résolution d'un système), écriture des solutions du système dans le cas où ce n'est pas un système de Cramer

Prévisions pour la semaine suivante : continuité.