Chapitre 21 : Géométrie plane

PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2021

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?
Un ours polaire ... après changement de coordonnées !

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées (sauf dans les annexes rappelant les « choses à savoir » en géométrie pure). Nous en profiterons pour définir correctement le produit scalaire et le déterminant dans le plan. Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets géométriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

Objectifs du chapitre :

- maitrise de la géométrie vectorielle et analytique élémentaire.
- capacité à calculer et manipuler des équations d'objets simples, notamment à l'aide de déterminants et de produits scalaires.

1 Repérage dans le plan.

1.1 Rappels sur les vecteurs.

Définition 1. Un vecteur du plan est une classe d'équivalence de bipoints pour la relation d'équipollence.

Cette définition est à peu près celle qu'on trouvait dans les manuels de sixième (oui, oui, sixième) des élèves ayant eu la joie de bénéficier de la réforme dite des « maths modernes » au début des années 70. Elle n'est présentée ici qu'à titre de gag hilarant, et sera donc immédiatement remplacée par une définition plus classique des vecteurs :

Définition 2. Un vecteur $\vec{u}$ est un objet géométrique caractérisant une translation. Il est en particulier défini de façon unique par les trois caractéristiques suivantes :

- sa **direction**, souvent matérialisée par une droite du plan, mais il s'agit en réalité de toute une classe d'équivalence (on y revient quand même) de droites du plan pour la relation de parallélisme. Autrement dit, toutes les droites parallèles à une droite donnée définissent la même direction que celle-ci.
- son **sens**, qui indique le sens du déplacement de la translation, à partir d'une origine fixée sur une droite matérialisant sa direction.
- sa **norme**, notée $\|\vec{u}\|$, qui indique la longueur du déplacement.

Remarque 1. Ce sont de fait les trois informations qu'on donne dans la vie de tous les jours pour décrire un déplacement. Si je veux vous expliquer comment venir chez moi en tram depuis Victoire, je vous préciserai la ligne à prendre (même s'il n'y a pas trop le choix), le sens dans lequel vous devez partir (ici, le langage courant a souvent tendance à utiliser le terme « direction » au lieu de « sens », ce qui est évidemment en complète contradiction avec le vocabulaire mathématique), et le nombre d'arrêts à laisser passer avant de descendre (équivalent de la distance à parcourir, et donc de la norme du vecteur).

Rappelons en passant les notations standard sur les vecteurs : si $\vec{u}$ est un vecteur caractérisant la translation t, on notera $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ pour tout couple de points du plan vérifiant $t(A) = B$. En particulier, deux vecteurs du plan écrits à l'aide de couples de points, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux (ils caractérisent la même translation) si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. Mais ce qui nous intéressera le plus concernant les vecteurs, pour faire le lien avec les espaces vectoriels auxquels ils ont donné leur nom, ce sont les opérations de base qu'on peut définir dessus :

Définition 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et t et t' les translations correspondantes. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur caractérisant la translation $t' \circ t$. Une autre façon de voir les choses en utilisant des points : si les trois points A, B et C vérifient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (en effet, $B = t(A)$ et $C = t'(B)$ donc $C = t' \circ t(A)$). C'est la fameuse **relation de Chasles**.

Définition 4. À tout vecteur $\vec{u}$ et à tout réel λ, on peut associer un vecteur $\lambda\vec{u}$, de même direction de même sens si $\lambda > 0$ et de sens opposé sinon, et de norme multipliée par $|\lambda|$. Ce produit est appelé **produit extérieur** d'un vecteur par un nombre réel.

Proposition 1. L'ensemble de tous les vecteurs du plan, muni de ces deux opérations de somme et de produit extérieur, est un espace vectoriel réel. L'élément neutre pour la somme de vecteurs est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

Remarque 2. En termes de points, on aura $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Définition 5. Un vecteur est **unitaire** (ou **normé**) s'il a une norme égale à 1.

Définition 6. Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils forment un angle plat (un angle θ est plat si $\theta \equiv 0[\pi]$), ou si l'un des deux est nul. Ils sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit, c'est-à-dire un angle θ tel que $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

1.2 Repères cartésiens.

Définition 7. Une **base** du plan est la donnée d'un couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ non colinéaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ forment une base du plan. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox) et (Oy).

En fait, cette notion de base coïncide exactement avec celle de base de l'espace vectoriel constitué de tous les vecteurs du plan, puisque cet espace est de dimension 2, et qu'une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

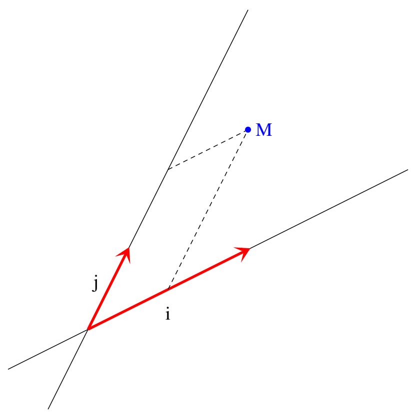
Définition 8. Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. Elle est **orthonormale** si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Un repère orthonormal est **direct** si $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On se gardera bien pour l'instant de définir clairement ce qu'est un angle ou ce que signifie l'orthogonalité de vecteurs (même si nous parlerons du produit scalaire usuel dans le plan dans la partie suivante du cours), ces notions apparaitront (pour un espace vectoriel quelconque) dans le tout denrier chapitre de cours de l'année, il faut savoir être patient !

Théorème 1. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. Tout vecteur du plan peut s'écrire de façon unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, où x et y sont deux réels appelés **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Là encore, on ne fait en fait que recopier les définitions de ces notions vues dans le cadre des espaces vectoriels.

Définition 9. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, et M un point du plan. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x, y)$.



Dans ce repère, le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Remarque 3. Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.

Méthode : Il existe évidemment énormément de repères dans le plan, et il faut être capable de passer d'un repère à l'autre. Plutôt que de vous donner des formules lourdes dans le cas général, je préfère vous expliquer la méthode, les calculs étant faciles à refaire. Considérons donc un point M, qui admet pour coordonnées (x, y) dans un premier repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et dont on cherche à calculer les nouvelles coordonnées (x', y') dans un second repère $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$. Pour cela, il faudra bien entendu au préalable avoir exprimé les vecteurs de la seconde base dans la première : $\vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j}$, et $\vec{j'} = c\vec{i} + d\vec{j}$. On écrit alors $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = -x_{O'}\vec{i} - y_{O'}\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x - x_{O'})\vec{i} + (y - y_{O'})\vec{j}$. Comme par ailleurs on a par définition $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = ax'\vec{i} + bx'\vec{j} + cy'\vec{i} + dy'\vec{j} = (ax' + cy')\vec{i} + (bx' + dy')\vec{j}$, on obtient les deux équations $x - x_{O'} = ax' + cy'$ et $y - y_{O'} = bx' + dy'$. Reste un système à résoudre. Alternativement, on peut partir des coordonnées du point O dans le nouveau repère pour obtenir des formules donnant x' et y' en fonction de x et y.

Exemple : Considérons un premier repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un second $(O', \vec{i'}, \vec{j'})$, où O' a pour coordonnées $(-1, 2)$ dans l'ancien repère, et $\vec{i'} = \vec{i} + \vec{j}$, et $\vec{j'} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. On considère le point M ayant pour coordonnées $(3, 3)$ dans le premier repère et on cherche ses coordonnées (x', y') dans le second. On écrit donc $3\vec{i} + 3\vec{j} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = -\vec{i} + 2\vec{j} + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = -\vec{i} + 2\vec{j} + x'(\vec{i} + \vec{j}) + y'(-\vec{i} + 3\vec{j}) =$

$(-1+x'-y')\vec{i}+(2+x'+3y')\vec{j}$. Par identification, on a donc les deux équations $4=x'-y'$ et $1=x'+3y'$. Une petite soustraction donne $3=-4y'$, soit $y'=-\frac{3}{4}$, puis $x'=4+y'=\frac{13}{4}$. Les coordonnées cherchées sont donc $\left(\frac{13}{4},-\frac{3}{4}\right)$.

Proposition 2. Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $(O',\vec{i'},\vec{j'})$ deux repères orthonormaux directs, et $\theta=\widehat{(\vec{i},\vec{i'})}$, alors les coordonnées (x',y') d'un point M dans le nouveau repère sont en relation avec celles de l'ancien, notées (x,y), via les formules :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-x_{O'} & = & \cos(\theta)x'-\sin(\theta)y' \\ y-y_{O'} & = & \sin(\theta)x'+\cos(\theta)y' \end{array}\right.$$

1.3 Répérage polaire.

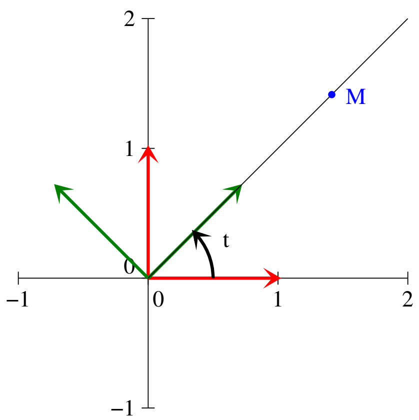
Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues sur les nombres complexes, le repérage cartésien (couple de coordonnées (x,y)) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z=a+ib$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z=re^{i\theta}$.

Définition 10. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal direct, et $\theta\in\mathbb{R}$. Le **repère polaire** associé au réel θ est le repère orthonormal direct $(O,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$, où $\vec{u}(\theta)=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$, et $\vec{v}(\theta)=-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$.

Remarque 4. Les vecteurs de base du repère polaire associé à l'angle θ sont parfois notés $\vec{u_r}$ (au lieu de $\vec{u}(\theta)$) et $\vec{u_\theta}$ (au lieu de $v(\vec{\theta})$). Le repère polaire associé à l'angle θ correspond simplement à une rotation d'angle θ du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définition 11. Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal direct, et M un point du plan distinct de l'origine O du repère. Un **couple de coordonnées polaires** du point M est un couple de réels (r,θ) tel que $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}(\theta)$, où $u(\vec{\theta})$ est le premier vecteur de la base du repère polaire associé à θ. Un tel couple est unique si $M\neq O$ si on impose de plus la condition $r>0$ (l'angle θ est alors unique à 2π près), mais le couple $(-r,\theta+\pi)$ est également un couple de coordonnées polaires du point M.

Remarque 5. On peut convenir que n'importe quel couple de la forme $(0,\theta)$ constitue un couple de coordonnées polaires de l'origine O du repère.



Sur ce schéma (où θ est noté t), le point M a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et pour coordonnées polaires $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\frac{3\pi}{4}\right)$. En vert, le repère polaire associé à l'angle $\frac{\pi}{4}$.

Proposition 3. Si un point M admet pour coordonnées cartésiennes (x, y), et pour coordonnées polaires (r, θ) dans un même repère, alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Dans l'autre sens, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ conviennent quand le point est situé « à droite » de l'axe des ordonnées du repère initial (on peut ajouter π pour avoir une formule correcte quand $x < 0$, mais on ne pourra évidemment pas gérer les points de l'axe des ordonnées par ce type de formules).

Démonstration. C'est quasi évident vu la définition des coordonnées polaires et du repère polaire associé à θ : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) = r(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\theta)\vec{j}$. Les formules dans l'autre sens doivent évidemment vous rappeler des souvenirs, cela correspond naturellement au calcul du module et de l'argument d'un nombre complexe. Elles découlent des précédentes : $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = r$, et $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta$ si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. $\square$

2 Produit scalaire et déterminant.

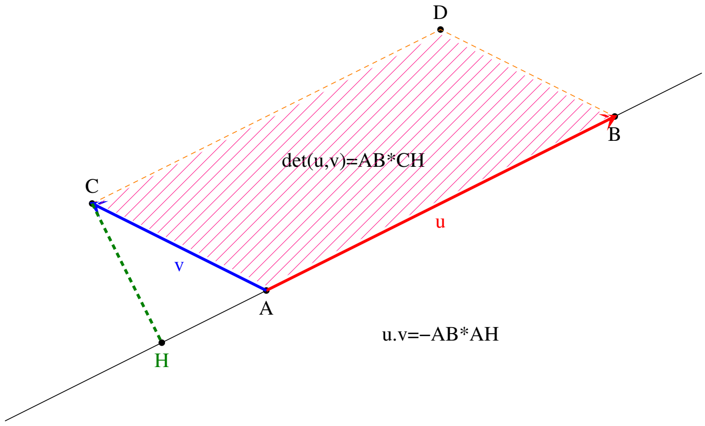
2.1 Produit scalaire.

Définition 12. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le réel $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

On croisera éventuellement pour le produit scalaire (mais assez rarement en mathématiques) les notations $< u, v >$, $(u \mid v)$ ou encore $< u \mid v >$ (les flèches sur les vecteurs sont ici volontairement omises car ces notations sont la plupart du temps utilisées dans des espaces vectoriels plus généraux où ne note pas les vecteurs « avec des flèches »). Cette dernière notation est par exemple classique en mécanique quantique, où les calculs de produits scalaires jouent un rôle fondamental.

Remarque 6. Rappelons que $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (valeur qu'on appelle aussi **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{u}$). On peut ainsi « développer » des carrés scalaires de sommes ou de différences comme des identités remarquables en exploitant la bilinéarité du produit scalaire énoncée plus bas. Ainsi, par exemple, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$. Cette égalité permet d'ailleurs de démontrer en une demi-ligne le très classique théorème de Pythagore (ainsi que sa réciproque), démonstration qui reste valable dans n'importe quel espace où on a défini un produit scalaire.

Remarque 7. On peut donner une interprétation géométrique du produit scalaire en termes de projection : si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, en notant H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on peut écrire $\vec{u}.\vec{v} = \overline{AB}.\overline{AH}$ ($\overline{AB}$ désignant la mesure algébrique du segment $[AB]$, qui est égale à sa distance au signe près, deux segments de même direction mais de sens opposé ayant des mesures algébriques de signe opposés).



Proposition 4. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de nos définitions : le produit scalaire est nul si et seulement si le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs est nul, ce qui se produit si cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, ce qui correspond à la définition classique de l'orthogonalité. En fait, on verra au chapitre 24 que la construction de la notion d'orthogonalité dans un espace vectoriel quelconque se fait en sens inverse de ce que nous avons fait ici : on définit d'abord le produit scalaire (de façon complètement abstraite, comme application vérifiant certaines propriétés théoriques fondamentales qui sont bien entendu vérifiées par ce qu'on appelle « le » produit scalaire dans le plan ou dans l'espace, puis on **définit** des vecteurs orthogonaux comme des vecteurs dont le produit scalaire est nul). □

Proposition 5. Propriétés théoriques du produit scalaire.

Le produit scalaire est :

- bilinéaire : $\vec{u}.(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u}.\vec{v} + \mu\vec{u}.\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda\vec{u}.\vec{w} + \mu\vec{v}.\vec{w}$.
- symétrique : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- défini positif : $\forall\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u}.\vec{u} \geqslant 0$, et $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

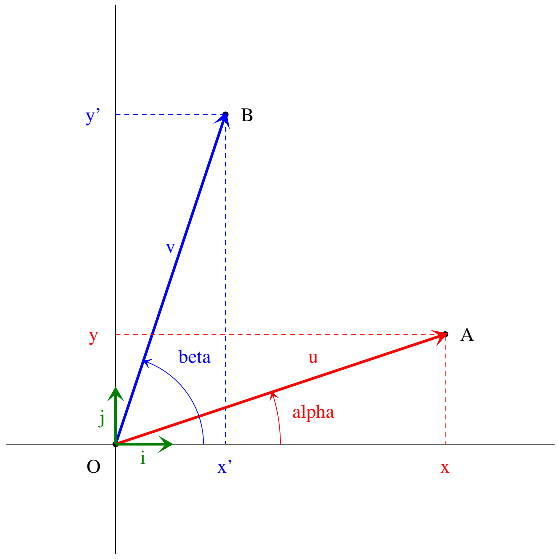
Démonstration.

- La bilinéarité est pénible à vérifier avec notre définition du produit scalaire, alors qu'elle est très facile avec l'expression dans une base orthonormée donnée (et démontrée) juste après : $x(\lambda x' + \mu x'') + y(\lambda y' + \mu y'') = \lambda(xx' + yy') + \mu(xx'' + yy'')$ (la deuxième partie découle de la symétrie).
- Il suffit de constater que $\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, ce qui découle de la parité du cosinus.
- C'est une conséquence immédiate du fait que $\vec{u}.\vec{u} = \|u\|^2$.

□

Remarque 8. Pour anticiper un peu les définitions du fameux chapitre 24, on appellera en fait beaucoup plus généralement **produit scalaire** dans un espace vectoriel E quelconque toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie ces trois propriétés fondamentales. Il existe donc dans $\mathbb{R}^2$ beaucoup d'autres produits scalaires que celui qu'on utilise habituellement (et qui définissent des notions d'orthogonalité, de distances et d'angles différentes de celles qu'on manipule avec le produit scalaire standard), mais surtout on peut définir des produits scalaires et donc de l'orthogonalité dans des espaces vectoriels beaucoup plus exotiques, par exemple des espaces de fonctions et de polynomes. Ainsi, toute la théorie de la décomposition des fonctions périodiques en séries de Fourier est une application directe de la théorie mathématique des espaces pré-hilbertiens que nous évoquerons (très rapidement) dans le chapitre 24.

Proposition 6. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal du plan, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.



Démonstration. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormal dans lequel on connait nos coordonnées. Notons A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et notons $\alpha = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}})$ et $\beta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}})$. On peut alors écrire $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OA \times OB \times \cos(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha))$. Or, $x = OA\cos(\alpha)$, $y = OA\sin(\alpha)$, $x' = OB\cos(\beta)$ et $y' = OB\sin(\beta)$. On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \left(\dfrac{x}{OA} \times \dfrac{x'}{OB} + \dfrac{y}{OA} \times \dfrac{y'}{OB}\right) = xx' + yy'$. □

2.2 Déterminant.

Puisque nous avons déjà reparlé du déterminant de deux vecteurs du plan dans notre chapitre consacré aux matrices d'applications linéaires, contentons-nous de rappeler les principales choses à savoir pour les mettre en parallèle avec les propriétés du produit scalaire.

Définition 13. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, leur **déterminant** est le nombre réel $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Remarque 9. Avec les mêmes notations que pour le produit scalaire, on peut interpréter le déterminant comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times CH$ (au signe près). Plus intéressant, le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (aire du parallélogramme $ABDC$ dans la figure tracée pour le produit scalaire).

Proposition 7. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration. Comme pour le déterminant, c'est une conséquence immédiate de nos définitions. □

Proposition 8. Propriétés théoriques du déterminant.

Le déterminant est :

- bilinéaire : $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}, \vec{w})$ et $\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$.
- antisymétrique : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.
- alternée : $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u}, \vec{u}) = 0$.

Démonstration. La bilinéarité est à nouveau facile à prouver une fois connue l'expression en base orthonormale, et l'antisymétrie découle de l'imparité du sinus. □

Proposition 9. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal direct, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Démonstration. En reprenant les notations de la démonstration effectuée dans le cas du produit scalaire, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = OA \times OB \times \sin(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha)) = OA \times OB \times \left(\dfrac{y'}{OA} \times \dfrac{x}{OB} - \dfrac{x'}{OA} \times \dfrac{y}{OB}\right) = xy' - x'y$. □

Exemple : Rappelons qu'on peut calculer très rapidement des aires à l'aide du déterminant. Si on place dans un repère orthonormal les points $A(-1, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(-4, 6)$, l'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}(15+6) = \dfrac{21}{2}$. Il est bien entendu totalement exclu d'utiliser d'autres méthodes (et notamment des méthodes horribles à bases de calcul explicite de projeté orthogonal) pour calculer des aires dans vos exercices de géométrie.

3 Droites et cercles.

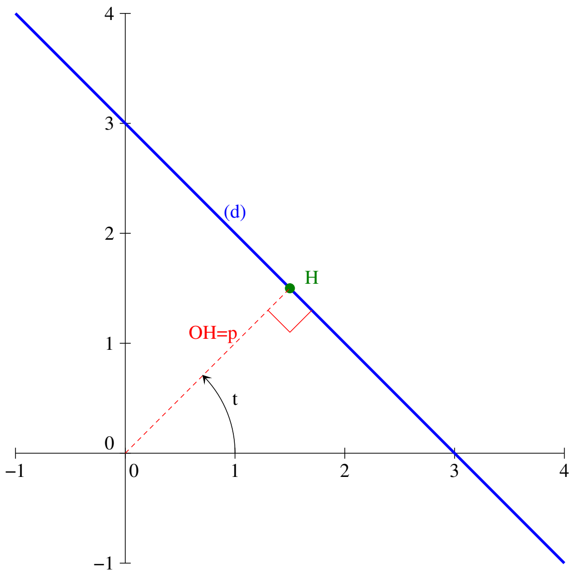
3.1 Équations de droites.

Proposition 10. Équations cartésiennes de droite

Une équation du type $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, est l'équation cartésienne d'une droite. Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.

Remarque 10. Une telle équation n'est pas unique, puisqu'en multipliant les trois coefficients a, b et c par une même constante non nulle k, on trouve une nouvelle équation de la même droite. On évitera dans la mesure du possible de recourir au réflexe « une équation de droite est de la forme $y = ax + b$ » puisqu'on perd alors les droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Proposition 11. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, où (p, θ) représente un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal H de l'origine O du repère sur la droite (d). Une telle équation est appelée **équation normale** de la droite (d).



Démonstration. En effet, un point $M(x, y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OH} = 0$, c'est-à-dire si $(x - p\cos(\theta))p\cos(\theta) + (y - p\sin(\theta))p\sin(\theta) = 0$, ce qui donne en développant $xp\cos(\theta) + yp\sin(\theta) = p^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = p^2$. Il suffit alors de tout diviser par p pour obtenir l'équation normale (la seule valeur posant problème est $p = 0$, pour laquelle l'angle θ n'est pas défini). $\square$

Remarque 11. Pour passer d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ à une équation normale, il suffit de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On obtient alors une équation $a'x + b'y + c' = 0$, avec $\sqrt{a'^2 + b'^2} = 1$. On peut donc écrire $a' = \cos(\theta)$ et $b' = \sin(\theta)$ puisque le point (a', b') correspond à un point du cercle trigonométrique.

Définition 14. Un **vecteur directeur** d'une droite (d) du plan est un vecteur colinéaire à tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points appartenant à la doite (d). Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (d).

Remarque 12. Si la droite (d) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normale à la droite (d), et le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Exemples : il est indispensable de savoir calculer rapidement l'équation d'une droite à partir d'une des données suivantes :

- coordonnées de deux points A et B appartenant à la droite.
- coordonnées d'un point A appartenant à la droite et d'un vecteur directeur de la droite.
- coordonnées d'un point A appartenant à la droite et d'un vecteur normal à la droite.

- coordonnées d'un point de la droite et donnée d'une droite parallèle à la droite.
- coordonnées d'un point de la droite et donnée d'une droite perpendiculaire à la droite.

Surtout il faut savoir déterminer ces équations de droite de façon élégante à l'aide des outils fondamentaux que sont le déterminant et le produit scalaire. Hors de question de produire une rédaction du type « je vais calculer le coefficient directeur en faisant $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ puis je remplacerai par les coordonnées du point A pour trouver l'ordonnée à l'origine », c'est moche, inefficace et ça ne marche même pas toujours. Ainsi, à partir des deux points $A(-1,2)$ et $B(3,-2)$, on calcule l'équation de la droite (AB) en disant simplement que le point $M(x,y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Comme $\overrightarrow{AB} = (4,-4)$ et $\overrightarrow{AM} = (x+1, y-2)$, on trouve immédiatement l'équation cartésienne $-4(x+1) - 4(y-2) = 0$, soit $-4x - 4y + 4 = 0$ ou encore $x + y - 1 = 0$ (ou si vous y tenez vraiment $y = 1 - x$).

Un exemple utilisant un produit scalaire : on vous donne les trois points $A(1,2)$, $B(3,-1)$ et $C(-2,-2)$ et on vous demande de calculer l'équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Hors de question d'aller calculer des coordonnées de projeté orthogonal, ça ne sert à rien ! Un point $M(x,y)$ appartient à cette hauteur si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$. Comme $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-2)$ et $\overrightarrow{BC} = (-5,-1)$, on obtient à nouveau immédiatement une équation cartésienne : $-5(x-1)-(y-2) = 0$, soit $-5x - y + 7 = 0$ ou encore $5x + y - 7 = 0$ (ou bien sûr $y = -5x + 7$).

Définition 15. La droite (d) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b)$ peut être décrite par le **système d'équations paramétriques** $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \end{array} \right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, ce qu'on peut traduire par l'existence d'un réel t pour lequel $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Cela donne les deux équations $x - x_A = ta$ et $y - y_A = tb$, dont découlent les formules. Le principe d'un système d'équations paramétriques est comme leur nom l'indique de décrire un objet géométrique à l'aide de paramètres (ici il y en a un seul, c'est le réel t, mais pour des objets à deux dimensions il en faudrait deux), de façon à ce que chaque point de l'objet corresponde à une valeur (et une seule en général) du ou des paramètres. Cette façon de procéder est en fait extrêmement similaire à la notation Vect utilisée pour les espaces vectoriels. En gros, on décrit la droite sous la forme « $d = A + \mathrm{Vect}(u)$ » (cette notation très douteuse où on additionne un point et un espace vectoriel pour obtenir une droite est évidemment à ne pas retranscrire sur une copie, mais c'est vraiment l'idée). $\square$

Remarque 13. Pour déterminer si un point appartient à une droite décrite par des équations paramétriques, il faut donc résoudre un système (de deux équations à une inconnue, ce qui est un peu particulier, mais le point ne sera sur la droite que si les valeurs de t obtenues à partir des deux équations sont égales).

Proposition 12. Distance d'un point à une droite (hors programme).

Soit $M(x_M, y_M)$ un point du plan, et (d) une droite. La distance de M à la droite (d) est la distance minimale entre M et les points de la droite (d). Elle est égale à la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (d), et peut être donnée par une des quatre formules suivantes (on note ici $d(M,d)$ la distance de M à la droite, même si cette notation est peu lisible) :

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), alors $d(M,d) = \dfrac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|}$.
- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d), alors $d(M,d) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
- Si la droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors $d(M,d) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- Si la droite a pour équation normale $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, alors $d(M,d) = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p|$.

Démonstration.

- Il faut revenir à l'interprétation géométrique du déterminant : $|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u})| = \|\vec{u}\| \times MH$, où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d). La distance MH étant égale à celle de M à (d), la formule en découle.
- C'est exactement comme ci-dessus, le produit scalaire avec un vecteur normal est (au signe près) égal à $\|\vec{n}\| \times MH$.
- Quitte à tout diviser par $\sqrt{a^2+b^2}$, on trouve une équation normale de la droite, et on se ramène au cas suivant.
- Le vecteur $\vec{n}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est un vecteur normal à (d) normé, et le point $A(p\cos(\theta), p\sin(\theta))$ appartient à la droite, donc en reprenant la deuxième formule démontrée, $d(M,d) = |\overrightarrow{AM}.\vec{n}| = |(x_M - p\cos(\theta))\cos(\theta) + (y_M - p\sin(\theta))\sin(\theta)| = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))| = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p|$.

□

Exemple : Soit $M(3,5)$ et (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$, alors $d(M,d) = \dfrac{|6-15+1|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$. Les formules précédentes étant hélas hors programme, il faudra en fait être capables de les redémontrer, ou plutôt de calculer à la main les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite (d).

C'est en fait assez simple : le point $H(x,y)$ appartient à la droite (d), donc vérifie la première équation $2x - 3y + 1 = 0$, et le vecteur $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à (d), donc à son vecteur directeur $\vec{u} = (3,2)$. Comme $\overrightarrow{MH} = (x-3, y-5)$, on obtient la deuxième équation $3(x-3) + 2(y-5) = 0$, soit $3x + 2y - 19 = 0$. Il reste à résoudre le système constitué de ces deux équations. L'opération $2L_1 + 3L_2$ donne $13x - 55 = 0$, donc $x = \dfrac{55}{13}$, puis $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{41}{13}$. Reste enfin à calculer la distance $MH = \sqrt{\left(3 - \dfrac{55}{13}\right)^2 + \left(5 - \dfrac{41}{13}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{256+576}}{13} = \dfrac{\sqrt{832}}{13} = \dfrac{\sqrt{13\times 64}}{13} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$. Les calculs sont tout de même beaucoup moins sympathiques.

3.2 Équations de cercles.

Définition 16. Équation cartésienne de cercle.

Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2+y^2-2ax-2by-c = 0$ avec $a^2 + b^2 + c \geqslant 0$ est une équation de cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{c + a^2 + b^2}$.

Exemple : On peut factoriser l'équation $x^2+y^2+8x-2y+13 = 0$ sous la forme $(x+4)^2+(y-1)^2 = 4$, où on reconnait le cercle de centre $A(-4, 1)$ et de rayon 2. On a déjà vu ce genre de technique dans le chapitre sur les complexes, c'est exactement pareil ici.

Proposition 13. Le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration. C'uest normalement une propriété que vous connaissez bien depuis votre collège. Démontrons-là à coup de propriétés du produit scalaire, en introduisant le point I, milieu du segment $[AB]$ et donc centre du cercle de diamètre $[AB]$. On peut alors écrire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$. Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$. Le produit scalaire est donc nul si et seulement si $MI = IA$, ce qui indique bien que M appartient au cercle de centre I et de rayon IA, autrement dit au cercle de diamètre $[AB]$. □

Définition 17. Le cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R peut être décrit dans un repère orthonormal par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + R\cos(t) \\ y & = & y_A + R\sin(t) \end{array}\right.$, où $t \in]-\pi, \pi]$ (on peut aussi prendre $t \in \mathbb{R}$, on parcourra simplement plusieurs fois le cercle).

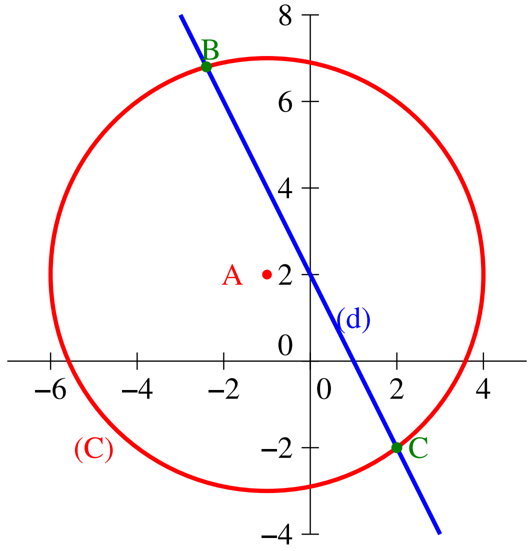
Remarque 14. On reconnait, à une homothétie de rapport R et à une translation de vecteur de coordonnées (x_A, y_A) près, le classique paramétrage du cercle trigonométrique : $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.

Proposition 14. Intersections cercle-droite.

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon R et (d) une droite du plan. Alors :

- si $d(A, d) > R$, $\mathcal{C}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A, d) = R$, $\mathcal{C}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** au cercle $\mathcal{C}$.
- si $d(A, d) < R$, $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(-1, 2)$ et de rayon 5, et (d) la droite d'équation $2x+y-2 = 0$. On peut commencer par calculer $d(A, d) = \dfrac{|-2+2-2|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 5$ pour constater que $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection. Pour les déterminer on peut simplement exprimer y en fonction de x dans l'équation de la droite : $y = 2 - 2x$, et injecter cette expression dans l'équation du cercle : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ donne alors $(x + 1)^2 + (-2x)^2 = 25$, soit $x^2 + 2x + 1 + 4x^2 = 25$, donc $5x^2 + 2x - 24 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 480 = 484 = 22^2$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-2-22}{10} = -\dfrac{12}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2+22}{10} = 2$. On trouve les valeurs correspondantes des ordonnées $y_1 = 2 - 2x_1 = \dfrac{34}{5}$, et $y_2 = 2 - 2x_2 = -2$. Le cercle et la droite se coupent donc en $B\left(-\dfrac{12}{5}, \dfrac{34}{5}\right)$, et en $C(2, -2)$.

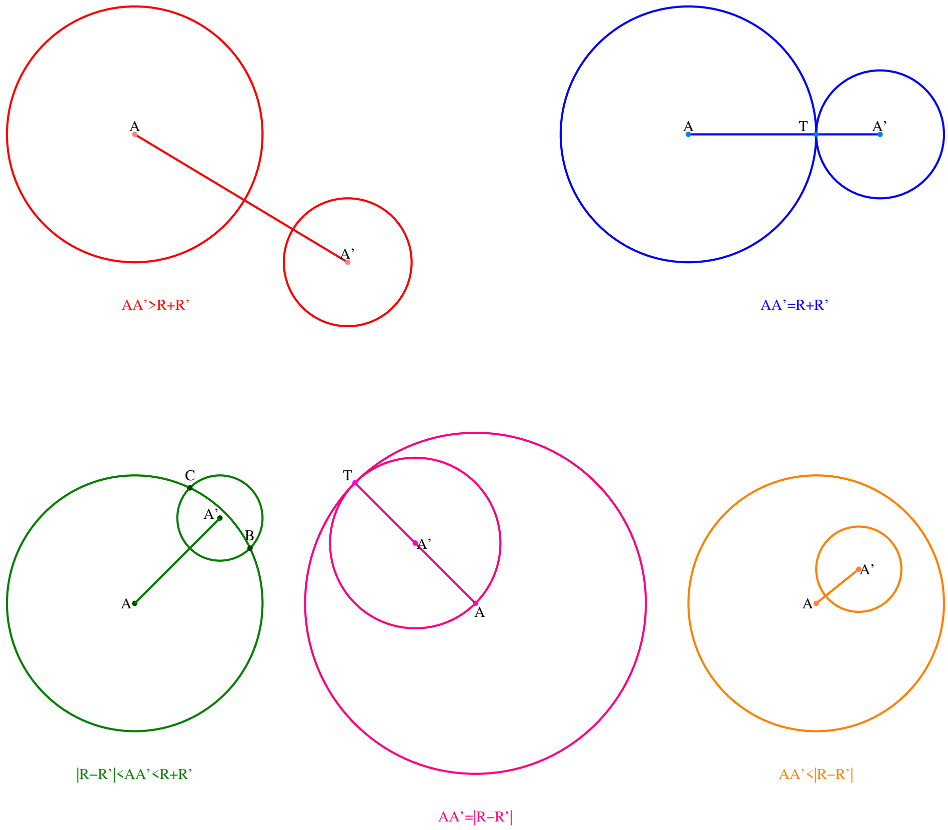


Proposition 15. Intersections cercle-cercle.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

- si $AA' > R + R'$, les deux cercles ne se coupent pas.
- si $AA' = R + R'$, les deux cercles sont tangents extérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $|R - R'| < AA' < R + R'$, les deux cercles se coupent en deux points distincts.
- si $AA' = |R - R'|$, les deux cercles sont tangents intérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $AA' < |R - R'|$, les deux cercles ne se coupent pas.

On peut ajouter la propriété classique suivante : dans le cas où les deux cercles ont deux points d'intersection B et C, la droite (BC) est perpendiculaire à la droite (AA') reliant les deux centres. En fait, (AA') est la médiatrice du segment $[BC]$.



4 Annexe : petits rappels de géométrie « pure ».

Dans l’histoire de la géométrie, la façon de présenter les résultats et surtout de les démontrer a beaucoup évolué au fur et à mesure de l’apparition de certaines techniques de calcul. On peut ainsi distinguer plusieurs façons de faire de la géométrie, de la plus archaïque à la plus sophistiquée :

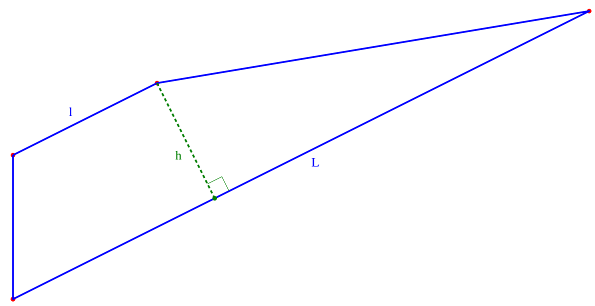
- géométrie « pure » : on se contente de raisonnements sur les longueurs et les angles, en utilisant des propriétés classiques sur le parallélisme comme le théorème de Thalès. C’est de loin la façon la plus difficile de faire de la géométrie car tout passe par le raisonnement.
- géométrie vectorielle : on ajoute à l’attirail de la géométrie pure l’outil « vecteurs » (et sa notation avec les flèches, ainsi que les outils dérivés comme le produit scalaire), ce qui simplifie beaucoup de démonstrations (par exemple celle du fait que les hauteurs d’un triangle sont concourantes) et permet de remplacer certaines étapes de raisonnement par des calculs. Ainsi, on calculera un produit scalaire pour montrer la perpendicularité de deux droites.
- géométrie cartésienne : on fixe un repère et tout passe par le calcul de coordonnées, quasiment plus rien ne nécessite de raisonnement géométrique. Le concept d’espace vectoriel est une sorte d’aboutissement de cette vision de la géométrie initiée comme son nom l’indique par René Descartes.

Nous allons dans cette annexe rappeler quelques formules et autres résultats de géométrie pure, que vous avez probablement vus il y a quelques années et que vous avez donc tout aussi probablement oubliés pour la plupart. Ils sont pourtant à connaitre pour les concours !

4.1 Formulaire.

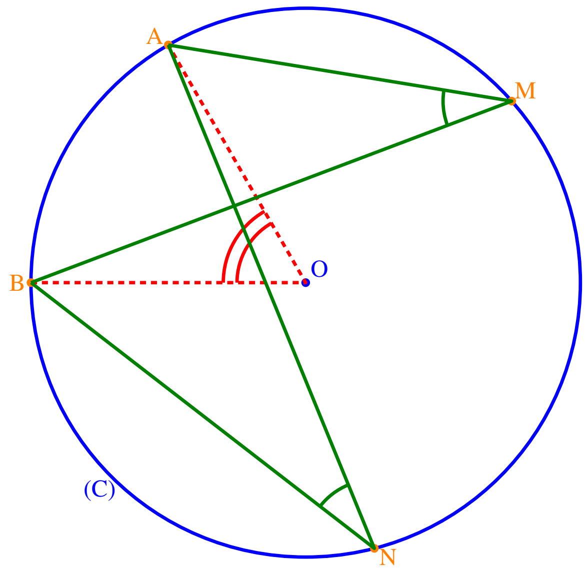
Je vous épargne les aires du carré et du rectangle, que vous devriez retrouver sans problème si besoin.

- diagonale du carré : $a\sqrt{2}$, où a est le côté du carré.
- aire du triangle : $\dfrac{b \times h}{2}$, où h est la hauteur issue du sommet opposé au côté b.
- hauteur d'un triangle équilatéral : $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, où a est le côté du triangle.
- aire du parallélogramme : $b \times h$, où h est la hauteur perpendiculaire au côté b du parallélogramme.
- aire du trapèze : $\dfrac{(l + L) \times h}{2}$, où l et L sont les longueurs des côtés parallèles du trapèze, et h la hauteur perpendiculaire à ces deux côtés.



4.2 Théorèmes.

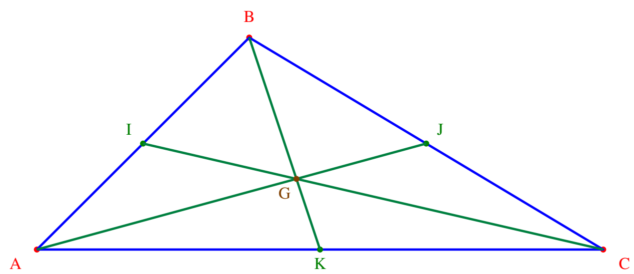
- théorème de Pythagore : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- relation d'Al-Kashi (généralisation du théorème de Pythagore) : dans un triangle quelconque ABC, en notant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC})$.
- théorème de Thalès : si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles et qu'on note E l'intersection des droites (AC) et (BD), alors $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{CD}$.
- théorème des milieux (cas particulier de Thalès) : si I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ alors $(IJ)//(BC)$ et $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
- triangle rectangle inclus dans un cercle : le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
- théorème de l'angle au centre : soient A et B deux points distincts d'un cercle de centre O, et M un troisième point du cercle situé sur le plus grand arc reliant A et B, alors $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (conséquence, si M et N sont deux tels points du cercle, on aura toujours $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$).



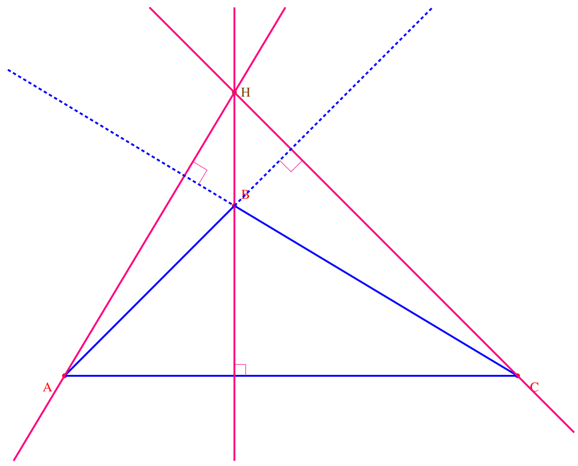
4.3 Droites remarquables dans le triangle.

Il existe quatre séries de trois droites remarquables dans un triangle. Chacune de ces quatre séries est constituée de trois droites concourantes (qui se coupent en un même point, quoi). Il est évident qu'il faut connaitre ces droites et surtout ne pas les confondre.

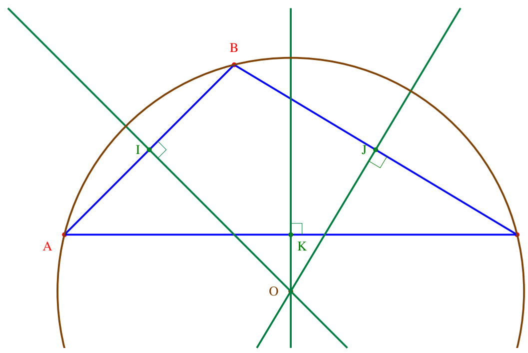
- Une **médiane** dans un triangle est un segment (et pas une droite, techniquement) issu d'un sommet du triangle et coupant le côté opposé du triangle en son milieu. Les trois médianes du triangle se coupent au point G appelé **centre de gravité** du triangle. Ce centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane (en partant du sommet). Par exemple, sur le schéma ci-dessous, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BK}$.



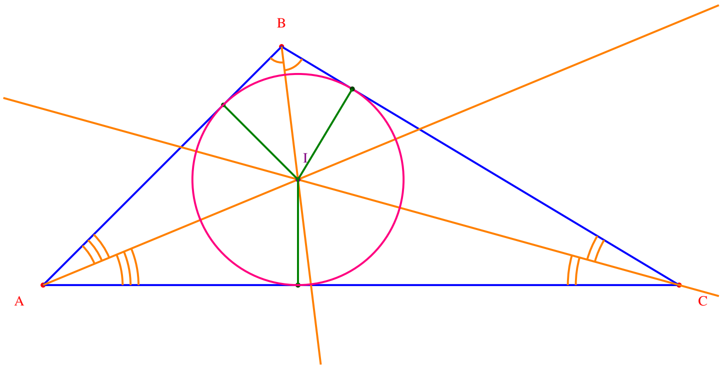
- Une **hauteur** dans un triangle est une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet. Les trois hauteurs du triangle se coupent au point H appelé **orthocentre** du triangle.



- La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ (pas besoin de triangle pour cette définition) est la droite passant par le milieu de ce segment et perpendiculaire au segment. Un point M appartient à cette médiatrice si et seulement s'il est équidistant des extrémités du segment : $MA = MB$. Les médiatrices des trois côtés d'un triangle se coupent au point O appelé **centre du cercle circonscrit** au triangle. Il est de fait le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle (c'est évident puisqu'il est équidistant des trois sommets).

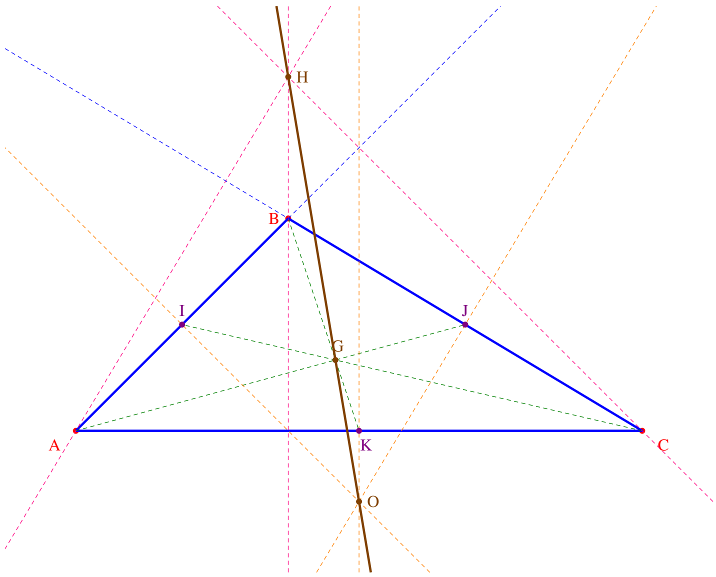


- Une **bissectrice** d'un angle $\widehat{BAC}$ (toujours pas besoin de triangle pour cette définition) est une droite coupant cet angle en deux angles égaux. Il existe en fait **deux** bissectrices d'un angle, la bissectrice extérieure étant perpendiculaire à la bissectrice intérieure (qui est celle qu'on vient de définir). Un point M appartient à l'une de ces bissectrices si et seulement s'il est équidistant des droites (AB) et (AC) (donc à égale distance de ses projetés orthogonaux sur ces deux droites). Cette propriété fournit d'ailleurs une méthode classique de construction des bissectrices à la règle et au compas : on reporte sur les droites (AB) et (AC) une même longueur à partir du point A, puis on reporte à nouveau une longueur commune à partir des deux points obtenus, pour trouver un point appartenant à la bissectrice. Les bissectrices des trois angles d'un triangle se coupent au point I appelé **centre du cercle inscrit** dans le triangle. Il est de fait le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle (c'est évident puisqu'il est équidistant de ces trois côtés).

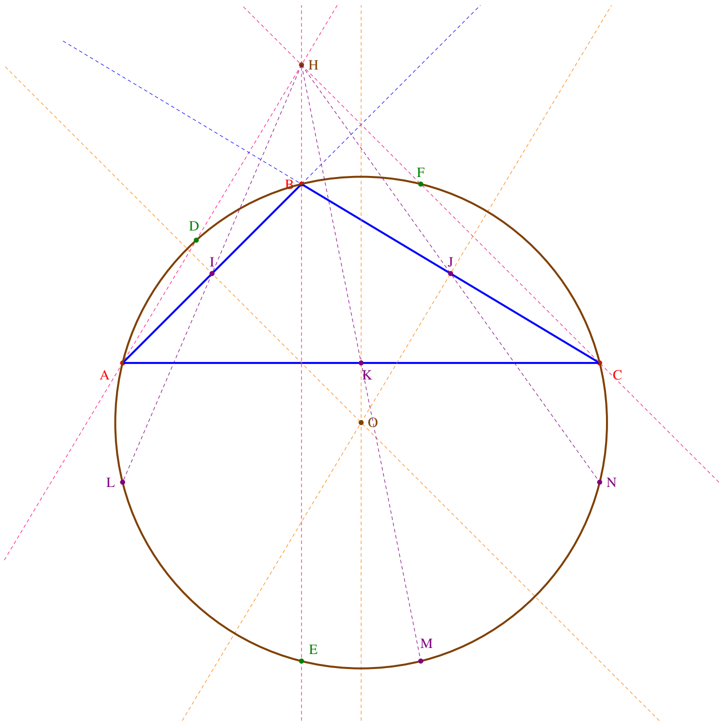


Quelques propriétés complémentaires classiques :

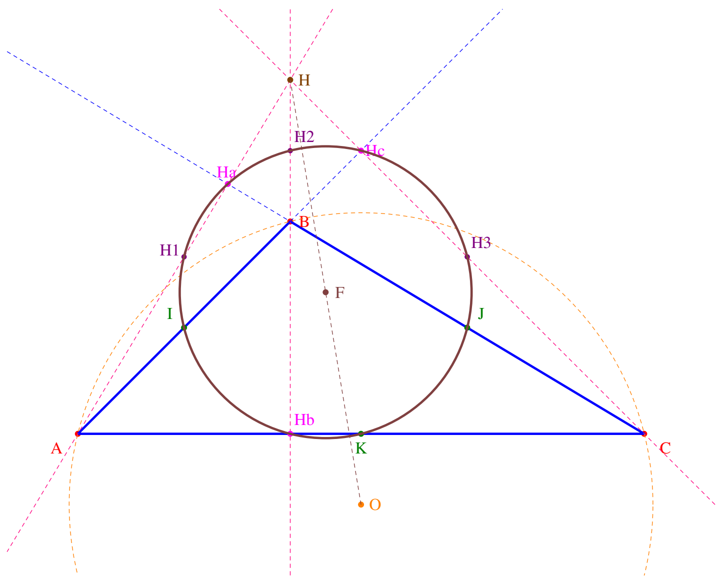
- les trois centres O, H et G sont toujours alignés (la droite les contenant est appelée **droite d'Euler** du triangle). Plus précisément, on a la relation $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG}$ (G est donc situé entre H et O, aux deux tiers du segment en partant de H). Bien entendu, dans le cas particulier d'un triangle équilatéral, les trois centres (et même les quatre avec celui du cercle inscrit) sont confondus. Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est en bleu (on a prolongé en pointillés deux des côtés pour pouvoir tracer les hauteurs), les médianes en vert, les hauteurs en rose, les médiatrices en orange, et la droite d'Euler en marron (ainsi que les trois centres) :



- le cercle circonscrit au triangle contient aussi les trois symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle (notés D, E et F sur la figure qui suit, ces points sont bien sûr situés sur les hauteurs du triangle), ainsi que les trois symétriques de ce même orthocentre H par rapport aux milieux des côtés du triangle (notés sur la figure L, M et N, on a laissé en violet les segments les rejoignant à l'orthocentre et passant donc par les milieux des côtés du triangle).



- le cercle d'Euler, ou cercle des neuf points (il porte aussi d'autres noms de mathématiciens plus exotiques qu'Euler si vous voulez vraiment faire original) est le cercle passant par les trois milieux des côtés du triangle, les trois milieux des segments reliant l'orthocentre H aux trois sommets du triangle (notés H_1, H_2 et H_3 sur la figure ci-dessous), ainsi que les trois pieds des hauteurs du triangle (projetés orthogonaux des trois sommets sur les côtés opposés, notés H_a, H_b et H_c sur la figure). Le centre F de ce cercle est le milieu du segment $[OH]$ (on a indiqué la position du point O sur la figure, et tracé en pointillés orange le cercle circonscrit au triangle ABC) joignant l'orthocentre au centre du cercle circonscrit au triangle, et son rayon est la moitié de celui du cercle circonscrit.



Bon, c'est vraiment dommage, mais je n'aurai pas le temps de vous parler aussi d'autres constructions passionnantes à partir du triangle, comme le point de Nagel, les cercles de Tucker ou le théorème de Morley. Il en existe vraiment des dizaines (il y a des livres entiers qui ne sont consacrés qu'à ça) !