Exercice à travailler n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 novembre 2020

Un calcul d'intégrale (légèrement) technique.

1. Cette équation ne peut évidemment avoir de sens que si $\cos(x) \neq 0$ (pour que la tangente soit définie), on peut l'écrire sous la forme $2\cos(x) + \dfrac{3\sin(x)}{\cos(x)} = 0$ puis, après avoir multiplié par $\cos(x)$, sous la forme $2\cos^2(x) + 3\sin(x) = 0$, ou encore $2 - 2\sin^2(x) + 3\sin(x) = 0$. On pose maintenant $X = \sin(x)$ pour se ramener à l'équation du second degré $-2X^2+3X+2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9+16 = 25$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{-3-5}{-4} = 2$ et $X_2 = \dfrac{-3+5}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. La condition $\sin(x) = 2$ n'étant jamais vérifiée, les seuls angles solutions sont ceux pour lesquels $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$, soit $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$. On en déduit immédiatement que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{2k\pi - \dfrac{\pi}{6}, 2k\pi - \dfrac{5\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (en fait, il faut aussi enlever du domaine de définition les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ pour lesquels la tangente n'est pas définie). L'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ ne contenant aucune valeur interdite, la fonction f y est continue, et l'intégrale I est donc correctement définie.
2. Faisons donc ce qu'on nous conseille. Si on pose $t = \sin(x)$, on aura $dt = \cos(x)\ dx$. En multipliant numérateur et dénominateur par $\cos(x)$, on fait naturellement apparaitre sous notre intégrale un $\cos(x)\ dx$ qu'on peut directement remplacer par dt. Reste alors sous l'intégrale l'expression $\dfrac{1-2\sin(x)}{2\cos^2(x) + 3\tan(x)\cos(x)} = \dfrac{1-2t}{2(1-t^2)+3t}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée par l'énoncé. Il ne reste plus qu'à modifier les bornes de l'intégrale : 0 devient $\sin(0) = 0$ et $\dfrac{\pi}{6}$ devient $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$. On trouve comme prévu $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1-2t}{2-2t^2+3t}\ dt$.
3. Le calcul effectué à la toute première question prouve que le dénominateur de cette fraction se factorise sous la forme $(2+3t-2t^2) = (2-t)(2t+1)$ (attention tout de même à ne pas oublier le coefficient dominant égal à 2 et à ne pas faire d'erreur de signe). On peut donc décomposer la fraction sous la forme $\dfrac{1-2t}{2+3t-2t^2} = \dfrac{a}{2-t} + \dfrac{b}{2t+1}$. En multipliant l'égalité par $2-t$ puis en posant $t = 2$, on trouve $a = -\dfrac{3}{5}$. De même, en multipliant par $2t+1$ puis en posant $t = -\dfrac{1}{2}$, on aura $b = \dfrac{4}{5}$. On conclut : $\dfrac{1-2t}{2+3t-2t^2} = \dfrac{3}{5(t-2)} + \dfrac{4}{5(2t+1)}$.
4. On peut maintenant calculer facilement $I = \dfrac{3}{5}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{t-2}\ dt + \dfrac{2}{5}\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{2}{2t+1}\ dt = \dfrac{3}{5}[\ln(2-t)]_0^{\frac{1}{2}} + \dfrac{2}{5}[\ln(2t+1)]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{5}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{5}\ln(2) + \dfrac{2}{5}\ln(2) = \dfrac{3\ln(3) - 4\ln(2)}{5}$.
5. Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, le cosinus et la tangente sont tous les deux strictement positifs, et le sinus est compris entre 0 et $\dfrac{1}{2}$, donc $1 - 2\sin(x) \geqslant 0$. On intègre donc une fonction toujours

positive, l'intégrale doit être positive. C'est bien le cas : $3\ln(3) - 4\ln(2) \simeq 3.3 - 2.8 > 0$, donc $I > 0$.