Exercice à travailler n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 9 novembre 2020

Un peu de technique sur les sommes télescopiques.

On s'intéresse dans cet exercice à la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3+2k^2-k-2}$.

1. Pourquoi la somme démarre-t-elle à l'indice $k=2$ et pas avant ? Calculer explicitement S_2 et S_3 (et S_4 si vous êtes courageux).
2. Résoudre l'équation $x^3+2x^2-x-2=0$, et en déduire une factorisation du dénominateur intervenant dans la définition de S_n.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{k^3+2k^2-k-2} = \dfrac{a}{k-\alpha} + \dfrac{b}{k-\beta} + \dfrac{c}{k-\gamma}$, où α, β et γ sont les trois solutions que vous n'avez pas manqué d'obtenir à la question précédente.
4. En déduire la valeur explicite de S_n en fonction de n à l'aide d'un télescopage (on ne cherchera pas à mettre au même dénominateur les fractions restantes dépendant de n).
5. Quelle est la limite de la suite (S_n) quand n tend vers $+\infty$? Cela semble-t-il cohérent avec les calculs effectués à la première question ?
6. Redémontrer la formule obtenue à la question 4 par récurrence.