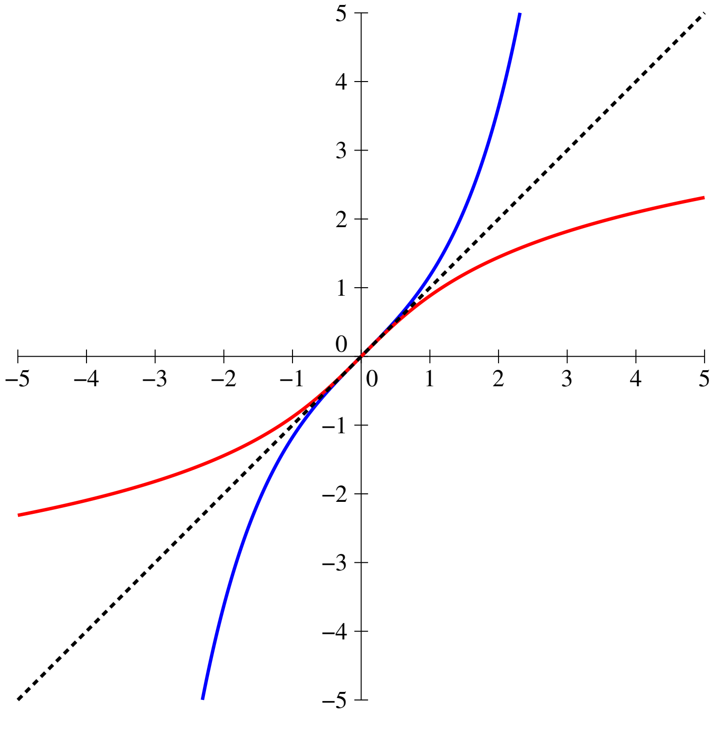
Exercice à travailler n° 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 septembre 2020

Étude d'une réciproque de fonction usuelle.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de monotonie opposée. La fonction sh est donc somme de deux fonctions strictement croissantes, et elle-même strictement croissante.
2. La fonction sh étant par ailleurs continue, le théorème de la bijection nous assure qu'elle sera effectivement bijective. Comme $\lim_{x \to -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée pour ces calculs), la fonction sh est tout simplement bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
3. Toujours en utilisant le théorème de la bijection, g aura « le même » tableau de variations que sh : strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec des limites respectivement égales à $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Les courbes exactes des deux fonctions ressemblent à ceci (courbe de sh en bleu, courbe de g en rouge, axe de symétrie d'équation $y = x$ en pointillés noirs) :



4. Il s'agit donc (quitte à multiplier par 2) de résoudre l'équation $e^x - e^{-x} = 2$. Multiplions également pas e^x tant qu'on y est (qui est strictement positif) pour obtenir l'équation équivalente $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. Il ne reste plus qu'à poser $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 - 2X - 1$, qui a pour discriminant $\Delta = 8$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $X_2 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. La première racine obtenue est strictement négative et ne correspond donc à aucune valeur possible pour x. Notre équation admet donc une solution unique (heureusement vu la bijectivité de sh) égale à $\ln(X_2) = \ln(1 + \sqrt{2})$.

5. On fait exactement comme précédemment : $e^x - e^{-x} = 2y$, donc après changement de variable $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$, qui est manifestement toujours positif, et admet pour solutions $X_1 = \dfrac{2y - 2\sqrt{1+y^2}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}$, et $X_2 = y + \sqrt{y^2+1}$. La première solution est toujours strictement négative (car $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$, donc $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ quel que soit le signe de y), on ne trouve donc qu'une seule solution à notre équation : $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
6. Par définition de ce qu'est une réciproque, on a $y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, donc la question précédente prouve que $g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
7. En gardant la variable y pour notre calcul, posons $u(y) = y + \sqrt{y^2+1}$ et commençons par calculer $u'(y) = 1 + \dfrac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{y+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}}$. On en déduit que $g'(y) = \dfrac{u'(y)}{u(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.
8. La formule vue en cours affirme que $g'(y) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}'(g(y))} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(g(y))}$. Or, on sait que $\mathrm{ch}^2(g(y)) = 1 + \mathrm{sh}^2(g(y)) = 1 + y^2$ puisque les fonctions g et sh sont réciproques l'une de l'autre. La fonction ch étant à valeurs positives, on peut en déduire que $\mathrm{ch}(g(y)) = \sqrt{1+y^2}$, et on retrouve bien la formule précédente.