

## Exercice à travailler n° 3

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 28 septembre 2020

### Étude d'une réciproque de fonction usuelle.

On cherche dans cet exercice à étudier la réciproque de la fonction usuelle sinus hyperbolique, que nous n'allons pas tarder à étudier en cours, et qui est simplement définie par  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

1. Justifier sans le moindre calcul de dérivée que sh est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire que sh est bijective de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle à préciser.
3. En notant  $g$  sa réciproque, donner le tableau de variations de la fonction  $g$  ainsi qu'une allure de sa courbe (on rappellera l'allure de la courbe de sh dans le même repère).
4. Résoudre l'équation  $\text{sh}(x) = 1$ .
5. Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation  $\text{sh}(x) = y$  (on exprimera l'unique solution de cette équation en fonction de  $y$ , en utilisant une méthode très similaire à celle de la question précédente).
6. En déduire une expression explicite de la fonction  $g$ .
7. À l'aide de l'expression précédente, calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ .
8. Question bonus : vérifier que cette dérivée est cohérente avec la formule de dérivée de la réciproque vue en cours (on aura sûrement besoin à un moment ou à un autre de la formule classique  $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ , valable pour tout réel  $x$ ).

Pour les plus curieux, la fonction  $g$  porte en fait le doux nom de fonction **argument sinus hyperbolique**, ou Argsh en abrégé, mais son étude n'est pas au programme en PTSI.