

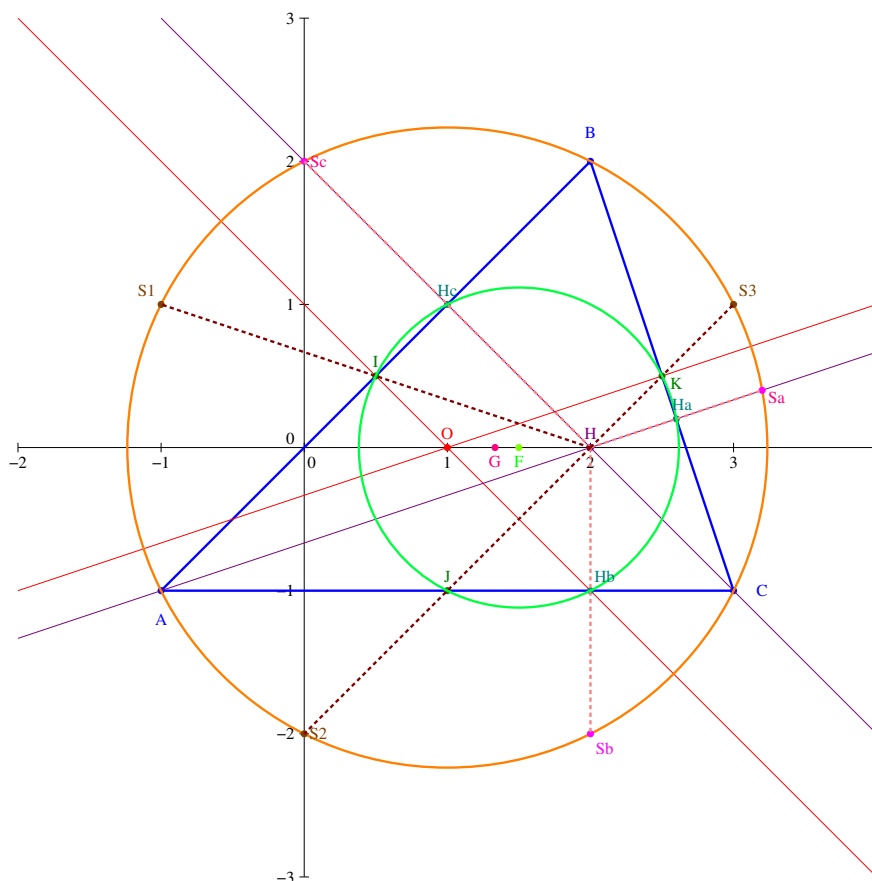
Exercice de la semaine n°26 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 juin 2020

Cercles remarquables dans un triangle.

- Voici une belle figure évidemment faite à l'ordinateur, avec tous les points et droites évoqués dans l'exercice (on a volontairement omis les médianes, ainsi que la médiatrice et la hauteur dont on n'a pas exploité les équations, pour tenter de ne pas trop surcharger la figure) :



- Un calcul facile pour commencer, on fait simplement la moyenne des coordonnées des trois points : $x_G = \frac{-1 + 2 + 3}{3} = \frac{4}{3}$ et $y_G = \frac{-1 + 2 - 1}{3} = 0$, donc $G\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.
- Commençons par donner les coordonnées des milieux qui vont servir par la suite : le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et le milieu K du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On peut maintenant calculer facilement les équations des médiatrices demandées : un point $M(x, y)$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Comme $\overrightarrow{AB}(3, 3)$ et $\overrightarrow{IM}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$, on obtient donc l'équation $3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 3\left(y - \frac{1}{2}\right) =$

0, soit $3x + 3y - 3 = 0$ ou encore $x + y - 1 = 0$. On procède de même pour l'autre médiatrice : on doit cette fois-ci avoir $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Comme $\overrightarrow{BC}(1, -3)$, on trouve cette fois l'équation $x - \frac{5}{2} - 3\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$, soit $x - 3y - 1 = 0$.

Le point O se situe à l'intersection des deux médiatrices dont on vient de calculer les équations. Ses coordonnées sont donc solution du système $x + y - 1 = x - 3y - 1 = 0$. En soustrayant les deux équations, on a $4y = 0$, donc $y = 0$, et $x = 1$. Voilà des résultats bien sympathiques : $O(1, 0)$.

Le rayon du cercle circonscrit est égal aux distances OA , OB et OC , qui sont évidemment égales et valent toutes $\sqrt{5}$. Une équation cartésienne du cercle est donc $(x - 1)^2 + y^2 = 5$, ou encore sous forme développée $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$.

4. La hauteur issue de A est définie par l'équation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, soit $(x + 1) - 3(y + 1) = 0$ ou encore $x - 3y - 2 = 0$ (on reprend bien sûr certains calculs de coordonnées déjà effectués auparavant). La hauteur issue de C a pour équation $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, soit $3(x - 3) + 3(y + 1) = 0$, ou encore (en divisant tout par 3) $x + y - 2 = 0$. L'orthocentre H étant situé à l'intersection de ces deux hauteurs, ses coordonnées satisfont le système $x - 3y - 2 = x + y - 2 = 0$. On obtient encore une fois $y = 0$ en soustrayant les équations, et on en déduit immédiatement $H(2, 0)$ (vraiment, le concepteur de cet exercice a bien choisi les coordonnées des points).

5. Les trois points sont trivialement alignés sur l'axe des abscisses du repère, et $\overrightarrow{GH} = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) = 2\overrightarrow{OG}$.

6. On a déjà calculé les coordonnées des milieux des côtés plus haut. Si on veut calculer les coordonnées du symétrique de H par rapport à I (notons donc S_1 ce point), on cherche donc un point qui vérifie $\overrightarrow{HS_1} = 2\overrightarrow{HI}$, donc $x_{S_1} = x_H + 2(x_I - x_H) = 2x_I - x_H = 1 - 2 = -1$. De même, on a bien sûr $y_{H_1} = 2y_I - y_H = 1 - 0 = 1$. Notre premier symétrique a donc pour coordonnées $(-1, 1)$ et on vérifie sans problème qu'il est sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 4$.

On effectue le même genre de calcul pour les deux autres symétriques. Notons S_2 le symétrique de H par rapport au milieu J de $[AC]$, on commence par écrire les coordonnées de ce point : $J(1, -1)$ alors $x_{S_2} = 2x_J - x_H = 2 - 2 = 0$ et $y_J = 2y_J - y_H = -2 - 0 = -2$. On a donc $S_2(0, -2)$. Là encore l'équation du cercle est trivialement vérifiée.

Dernier symétrique, on note S_3 le symétrique par rapport à K et on calcule de même $x_{S_3} = 2x_K - x_H = 5 - 2 = 3$ et $y_{S_3} = 2y_K - y_H = 1 - 0 = 1$. On trouve donc $S_3(3, 1)$, qui est encore une fois facilement sur le cercle puisque $3^2 + 1^2 - 6 = 4$.

7. Calculer les symétriques par rapport aux côtés est un peu plus pénibles. Notons par exemple S_a le symétrique de H par rapport à (BC) , on peut voir S_a comme le symétrique de H par rapport à son projeté orthogonal H_a sur cette même droite (BC) . Commençons donc par calculer les coordonnées de ce projeté H_a . Par définition, on a $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH_a}) = 0$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{HH_a} = 0$. En notant (x, y) les coordonnées du projeté, $\overrightarrow{BC} = (1, -3)$, $\overrightarrow{BH_a} = (x - 2, y - 2)$ et $\overrightarrow{HH_a} = (x - 2, y)$, donc on doit avoir $y - 2 + 3(x - 2) = 0$ et $x - 2 - 3y = 0$, soit $y + 3x = 8$ et $x - 3y = 2$. Une résolution de système passionnante donne $H_a\left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

On utilise ensuite les mêmes calculs que dans la question précédente pour le symétrique par rapport à ce point : $x_{S_a} = 2x_{H_a} - x_H = \frac{26}{5} - 2 = \frac{16}{5}$ et $y_{S_a} = 2y_{H_a} - y_H = \frac{2}{5}$. On trouve donc

$S_a\left(\frac{16}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Vérifions qu'il appartient bien à notre cercle circonscrit : $x_{S_a}^2 + y_{S_a}^2 - 2x_{S_a} - 4 = \frac{256}{25} + \frac{4}{25} - \frac{32}{5} - 4 = \frac{52}{5} - \frac{32}{5} - 4 = 0$, ça marche.

Il ne reste plus qu'à faire pareil pour les deux autres côtés. Notons de façon similaire S_b le symétrique par rapport à (AC) et H_b le projeté orthogonal sur (AC) . Le point $H_b(x, y)$ vérifie $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH_b}) = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HH_b} = 0$. Comme $\overrightarrow{AC} = (4, 0)$, $\overrightarrow{AH_b} = (x + 1, y + 1)$ et

$\overrightarrow{HH_b} = (x-2, y)$, on obtient les deux équations $4(y+1) = 0$ et $4(x-2) = 0$. On en déduit assez trivialement que $H_b(2, -1)$, puis $S_b(2, -2)$ (je vous épargne le détail, ici les calculs sont vraiment à la portée de tout le monde, on aurait presque pu prétendre que ça se voyait sur le dessin). Ce point est bien sur le cercle puisque $2^2 + (-2)^2 - 2 \times 2 - 4 = 0$.

Dernier symétrique à calculer, le symétrique S_c par rapport à (AB) . On notera encore une fois H_c le projeté orthogonal de H sur (AB) . On a cette fois-ci les conditions $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH_c}) = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH_c} = 0$, avec $\overrightarrow{AB} = (3, 3)$, $\overrightarrow{AH_c} = (x+1, y+1)$ et $\overrightarrow{HH_c} = (x-2, y)$. On a cette fois les équations $3(y+1) - 3(x+1) = 0$ et $3(x-2) + 3y = 0$ soit en simplifiant tout par 3 les conditions $y - x = 0$ et $x - 2 + y = 0$. On trouve donc $H_c(1, 1)$, puis $S_c(0, 2)$ (encore une fois les calculs sont triviaux), point qui est bien sur notre cher cercle circonscrit.

8. Un calcul facile pour les coordonnées de $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Puisque le cercle circonscrit avait un rayon $\sqrt{5}$, on cherche donc une équation du cercle de centre F et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. La voici : $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}$, donc $x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 = \frac{5}{4}$, ce qui se simplifie assez gentiment en $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$.
9. Il suffit de vérifier à chaque fois que les coordonnées des points vérifient l'équation obtenue à la question précédente. Pour le point I , on a $x_I^2 + y_I^2 - 3x_I + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$, c'est bon. Pour le point J , $1 + 1 - 3 + 1 = 0$, tout va bien. Et pour le point K , $\frac{25}{4} + \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 1 = 0$ est également vérifié. Les milieux des segments reliant H aux sommets du triangle ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $(2, 1)$ et $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, qui sont tous les trois sur le cercle : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$ (c'est en fait le même calcul que pour I), $4 + 1 - 6 + 1 = 0$ et $\frac{25}{4} + \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 1 = 0$ (même calcul que pour K). Restent à vérifier les trois pieds des hauteurs, qui sont en fait les points H_a , H_b et H_c utilisés à la question 7. On a donc déjà les coordonnées, il ne reste qu'à vérifier la compatibilité avec l'équation de cercle. Pour H_a , le calcul est superbe : $\frac{169}{25} + \frac{1}{25} - \frac{39}{5} + 1 = \frac{34}{5} - \frac{39}{5} + 1$, ça marche. Beaucoup plus tranquille pour H_b : $4 + 1 - 6 + 1 = 0$, et pour H_c : $1 + 1 - 3 + 1 = 0$.