Exercice à travailler n°24 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

31 mai 2021

Des matrices de projections et de symétries.

1. Soit on calcule les images des trois vecteurs de la base canonique (par exemple $f(1,0,0) = \left(\frac{3}{2}, -3, \frac{9}{2}\right)$) et on les recopie en colonnes dans une matrice carrée, soit on écrit directement sur les lignes de la matrice les coefficients des trois variables x, y et z dans l'expression de f. Dans tous les cas, $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -3 & -2 & -1 \\ \frac{9}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.
2. On obtient $M^2 = M$. Par exemple, le coefficient en haut à gauche de M^2 sera égal à $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 1 \times (-3) + \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4} - 3 + \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$. Cette égalité se traduit au niveau de l'application par $f^2 = f$, ce qui prouve que l'application f est une projection.
3. On commence par déterminer l'espace F sur lequel on projette, donc on détermine $\ker(f)$: $\begin{cases} \frac{3}{2}x & + & y & + & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ -3x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ \frac{9}{2}x & + & 3y & + & \frac{3}{2}z & = & 0 \end{cases}$. La dernière équation est clairement équivalente à la première (tout est simplement multiplié par trois), et la deuxième aussi (multipliée pat -2 cette fois-ci), il ne reste donc que la condition $z = -3x - 2y$, soit $F = \text{Vect}((1,0,-3),(0,1,-2))$. Pour l'image, on sait qu'elle va être de dimension 1 (théorème du rang), donc il suffit de calculer une image non nulle, par exemple celle du deuxième vecteur de la base canonique, pour obtenir $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,-2,3))$.
4. La famille $\mathcal{B} = ((1,-2,3),(1,0,-3),(0,1,-2))$ est en effet une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est obtenue en regroupant les bases de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. En notant e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs composant cette base, on a par construction $f(e_1) = e_1$; $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 0$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Aucun calcul nécessaire en effet, pour une symétrie par rapport à F parallèlement à G, on aura toujours $p(e_1) = e_1$, mais $p(e_2) = -e_2$ et $p(e_3) = -e_3$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Pour la matrice dans la base canonique, le plus simple est d'utiliser que $s = 2p - id$, donc $Mat_{can}(s) = 2M - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.