Exercice à travailler n$^{\text{o}}$ 23 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 mai 2021

Des classiques sur les endomorphismes.

Exercice 1 : Un tout petit peu de manipulation de projecteurs.

1. On peut par exemple écrire $F = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,1))$ (ne pas oublier que la variable x qui n'apparait pas dans l'équation peut prendre n'importe quelle valeur réelle), donc $\dim(F) = 2$ et $((1,0,0),(0,1,1))$ est une base de F (les deux vecteurs n'étant pas proportionnels). Pour G, c'est encore plus simple, on doit avoir $x = y$ et $z = 2y$, donc $G = \text{Vect}((1,1,2))$, la famille constituée de l'unique vecteur $(1,1,2)$ est une base de G, qui est un sous-espace de dimension 1.
2. On a déjà la première condition $\dim(F) + \dim(G) = 3$, contentons-nous de vérifier que la famille $((1,0,0) + (0,1,1) + (1,1,2))$ obtenue en regroupant les bases de nos deux espaces est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$ (ce qui revient à prouver que $F \cap G = \{0\}$). Supposons donc $a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2) = 0$, condition qui se traduit par les équations $a + c = b + c = b + 2c = 0$. Les deux dernières équations impliquent manifestement $c = 0$, en découle immédiatement $a = b = 0$, donc notre famille est bien libre, et $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
3. On se rend compte (mais un peu tard) qu'on aurait mieux ait de montrer à la question précédente que $F + G = \mathbb{R}^3$ puisqu'on va devoir le faire maintenant. Soit donc $u(x,y,z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, essayons de l'écrire sous la forme $u = a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2)$. Il faut donc résoudre le passionnant système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & + & c & = & x \\ & & b & + & c & = & y \\ & & b & + & 2c & = & z \end{array}\right.$. Une brillante soustraction des deux dernières équations donne $c = z - y$, puis on obtient $a = x + y - z$ et $b = 2y - z$. En posant $u_F = a(1,0,0) + b(0,1,1) = (x + y - z, 2y - z, 2y - z)$ et $u_G = c(1,1,2) = (z - y, z - y, 2z - 2y)$, on a donc écrit $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Par définition, on a alors $p(u) = u_F$, soit $p(x,y,z) = (x + y - z, 2y - z, 2y - z)$.

Exercice 2 : Des exemples d'endomorphismes nilpotents.

1. (a) Résolvons donc le petit système $\left\{\begin{array}{ccccccc} -x & & & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right.$. On a bien sûr intérêt à procéder par susbtitution ici : $z = x$ et $y = -x$, donc la deuxième équation devient $3x - x - 2x = 0$, qui est manifestement toujours vérifiée. On en déduit que $\ker(f) = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,-1,1))$. Ce noyau est de dimension 1.

   (b) Le théorème du rang nous permet de savoir que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Pour calculer l'image, on calcule comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\text{Im}(f) = \text{Vect}((-1,3,1),(0,1,1),(1,-2,0))$. Puisque l'image doit être de dimension 2, c'est sans surprise qu'on constate que $(-1,3,1) = (0,1,1) - (1,-2,0)$. On peut donc écrire plus simplement $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0,1,1),(1,-2,0))$.

   (c) En posant $X = z - x$, $Y = 3x + y - 2z$ et $Z = x + y$, on doit donc calculer $f \circ f(x,y,z) = f(X,Y,Z) = (Z - X, 3X + Y - 2Z, X + Y) = (2x + y - z, -2x - y + z, 2x + y + z)$.

(d) Un vecteur $u(x, y, z)$ appartient à $\ker(f^2)$ si et seulement si $2x + y - z = 0$ (les trois équations sont équivalentes), donc si $z = 2x+y$. Autrement dit, $\ker(f^2) = \text{Vect}((1, 0, 2), (0, 1, 1))$. On remarque que le vecteur $(0, 1, 1)$ est commun aux bases obtenues pour $\ker(f^2)$ et pour $\text{Im}(f)$. De plus, $(1, 0, 2) = (1, -2, 0)+2\times(0, 1, 1)$, donc $(1, 0, 2) \in \text{Im}(f)$, ce qui prouve que $\ker(f^2) \subset \text{Im}(f)$. Les deux espaces étant de dimension 2 (les deux vecteurs obtenus pour former la famille génératrice de $\ker(f^2)$ ne sont pas proportionnels), ils sont nécessairement égaux.

(e) Soit $u \in \mathbb{R}^3$, alors $f(u) \in \text{Im}(f)$ (c'est évident !), et donc, d'après la question précédente, $f(u) \in \ker(f^2)$. Autrement dit, $f^2(f(u)) = 0$, soit $f^3(u) = 0$. Tout vecteur a donc une image nulle par f^3, on a bien $f^3 = 0$, et f est donc nilpotent.

2. (a) Le fait que f est un endomorphisme est complètement évident. En fait, sa nilpotence aussi : $f^2(x, y, z, t) = f(0, x, y, z) = (0, 0, x, y)$, puis $f^3(x, y, z, t) = (0, 0, 0, x)$ et $f^4 = 0$.

(b) Il suffit de poser $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. La nilpotence est à nouveau logique : $f^k(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{n-k})$, jusqu'à avoir $f^n = 0$.

3. (a) Le polynôme Q est clairement de degré au maximum 2 si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ (comme on va le voir, il est même de degré plus petit que ça). Vérifions la linéarité : si P_1 et P_2 appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2)(X + 1) - (\lambda P_1 + P_2)(X) = \lambda P_1(X + 1) + P_2(X + 1) - \lambda P_1(X) - P_2(X) = \lambda f(P_1) - f(P_2)$. Aucun problème, f est bien un endomorphisme.

(b) Soyons bourrins et posons $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = a(X + 1)^2 + b(X + 1) + c - (aX^2 + bX + c) = aX^2 + 2aX + a + bX + b + c - aX^2 - bX - c = 2aX + a + b$. Le polynôme P appartient donc au noyau de f si $2a = a + b = 0$, autrement dit si P est un polynôme constant. On peut écrire $\ker(f) = \text{Vect}(1)$, et le noyau est bien sûr de dimension 1. L'image sera donc de dimension 2. Or, le calcul précédent prouve qu'on a toujours $f(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Comme cet espace est lui-même de dimension 2, on en déduit immédiatement que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$. Noyau et images ne sont pas supplémentaires, les polynômes constants appartenant aux deux.

(c) On calcule facilement (avec les mêmes notations que précédemment) $f^2(P) = 2aX + 2a + a+b-2aX-a-b = 2a$, puis $f^3(P) = 0$ puisque $f^2(P)$ est toujours un polynôme constant.

(d) Oui, bien sûr, puisque l'image d'un polynôme de degré n sera toujours un polynôme de degré $n-1$ (le terme dominant de $(X+1)^n$ va s'annuler avec celui de $P(X)$ dans le calcul de $f(P)$). Par une récurrence évidente, $f^k(P)$ sera de degré $n-k$, et on aura donc toujours $f^{n+1} = 0$.