Exercice à travailler n° 22 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 mai 2021

Des histoires très originales de boules dans des urnes.

1. Puisqu'on ne tire qu'une boule (au maximum) à chaque tirage, on ne peut pas avoir vidé deux urnes contenant deux boules chacune en seulement trois tirages, donc $P(A_3) = 0$. Le calcul devient intéressant quand on a fait quatre tirages : il faut avoir pioché exactement deux fois dans chaque urne, donc choisir par exemple les deux tirages où on a tiré dans l'urne 1 puis multiplier par la probabilité de tirer dans une urne spécifique pour chaque tirage, ce qui vaut bien sûr $\frac{1}{2}$ à chaque fois. On a donc $P(A_4) = \binom{4}{2} \times \frac{1}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. En fait, une autre façon de voir les choses est de considérer que la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a tiré dans l'urne 1 suit une loi binômiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{2}\right)$, et quon veut que cette variable prenne exactement la valeur 2.
   On va utiliser ce même raisonnement pour la suite : après cinq tirages, le nombre Z de tirages effectués dans l'urne 1 suit la loi binômiale $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{2}\right)$, et on souhaite cumuler les probabilités $P(Z = 2)$ (on a tiré deux fois dans l'urne 1 et trois fois dans la 2, dont une fois où on a en fait rien tiré du tout ; ce tirage peut d'ailleurs très bien être le cinquième, auquel cas l'urne était déjà vide après quatre tirages, ce qui n'est pas exclu par l'énoncé) et $P(Z = 3)$ (cette fois, c'est dans l'urne 1 qu'on tirera une fois dans le vide). Nos vastes connaissances sur les lois binômiales permettent donc de calculer $P(A_4) = \binom{5}{2} \times \frac{1}{2^5} + \binom{5}{3} \times \frac{1}{2^5} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$ (valeur logiquement supérieure à $P(A_4)$).
   Enfin, après six tirages, la variable Z représentant le nombre de tirages effectués dans l'urne 1 suit une loi binômiale de paramètre $\left(6, \frac{1}{2}\right)$ et on doit calculer $P((Z \geqslant 2) \cap (6 - Z \geqslant 2)) = P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = \frac{1}{64} \times \left(\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\right) = \frac{50}{64} = \frac{25}{32}$. La proba continue bien sûr à augmenter. On pourrait d'ailleurs prouver assez facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 1$, ce qui signifie que les deux finiront par être vides « presque sûrement » quand on multiplie les tirages (ce résultat est même vrai quel que soit le nombre d'urnes au départ).
2. (a) La variable X_i suit nécessairement une loi de Bernoulli puisqu'elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Reste à calculer la probabilité d'avoir $X_i = 1$. Pour cela, il ne faut jamais tirer dans l'urne U_i lors des n tirages. Comme les urnes sont équiprobables et les tirages indépendants, on a simplement $P(X_i) = 1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_1) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Or, en posant $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$, on sait très bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$. Non, vous ne le savez pas ? Pourtant, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\left(-\frac{1}{n}\right)\sim -1$, ce qui prouve bien que (u_n) tend vers $\frac{1}{e}$. On en déduit évidemment que $E(Y_n)\sim\frac{n}{e}$. La variable Y_n représente le nombre d'urnes dans lesquelles on n'a jamais pioché après n tirages.

(c) On a $Y_4(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ puisqu'on peut très bien avoir tiré dans chaque urne après quatre tirages (on aura alors $Y_4=0$), mais qu'il existe forcément au moins une urne dans laquelle on a tiré, ce qui limite la valeur maximale de Y_4 à 3. Le nombre total de tirages possibles après quatre tirages est de $4^4=256$ (tout ce qui nous intéresse ici est le numéro de l'urne dans laquelle on a tiré). Pour avoir $Y_4=0$, on doit avoir tiré exactement une fois dans chaque urne, donc $P(Y=0)=\frac{4!}{256}=\frac{3}{32}$ (il faut choisir l'ordre des urnes). Au contraire, pour avoir $Y_4=3$, on doit toujours tirer dans la même urne, donc $P(Y=3)=\frac{4}{256}=\frac{1}{64}$ (il faut simplement choisir l'urne). Calculons ensuite $P(Y_4=2)$, ce qui suppose qu'on tire dans deux urnes sur les quatre. Il faut donc choisir ces deux urnes, puis on a 2^4-2 tirages possibles une fois les deux urnes choisies (il faut enlever aux 2^4 tirages s'effectuant dans les deux urnes les deux cas particuliers où on a toujours tiré dans l'une des deux urnes, qui sont déjà comptés dans $P(Y=3)$), soit $P(Y=2)=\binom{4}{2}\times\frac{2^4-2}{256}=\frac{84}{256}=\frac{21}{64}$. Pour ne pas se fatiguer, on utlise le complémentaire pour calculer $P(Y=1)=\frac{256-24-4-84}{256}=\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$. On peut faire un joli tableau pour résumer tout ça :

k	0	1	2	3
$P(Y_4)=k$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{1}{64}$

Petite vérification en passant : $E(Y_4)=\frac{36+42+3}{64}=\frac{81}{64}$, et $4\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^4=\frac{81}{64}$, c'est cohérent avec les questions précédentes.

3. (a) La variable N_1 correspond exactement au nombre de tirages qu'on n'a **pas** effectués dans l'urne 1 (par exemple, si $n=8$ et qu'on tire deux fois dans l'urne, il reste 6 boules dans l'urne à l'issue des 8 tirages, ce qui est bien le nombre de tirages effectués « ailleurs »). La probabilité de ne pas tirer dans l'urne valant $1-\frac{1}{n}$ pour chaque tirage, on est dans une situation de schéma de Bernoulli, et $N_1\sim\mathcal{B}\left(n,1-\frac{1}{n}\right)$. En particulier, $E(N_1)=n-1$ (ce qui est très logique, après n tirages, on a tiré en moyenne une fois dans l'urne 1, il y reste donc $n-1$ boules), et $V(N_1)=n\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}$.

(b) Si X_1 prend la valeur 1, alors par définition de X_1, il reste n boules dans l'urne à l'issue des tirages et $N_1=n$. Sinon, on aura de toute façon $N_1\times X_1=0$. On a donc toujours $N_1\times X_1=nX_1$. Ce résultat n'a rigoureusement aucun intérêt.