Exercice à travailler n° 20 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2021

Un exercice de rédaction.

1. Par définition, $F = \text{Vect}((1,1,1,1))$ est la droite vectorielle (sous-espace de dimension 1) engendrée par le vecteur $(1,1,1,1)$ qui constitue donc à lui tout seul une base de F.
2. Il suffit de « résoudre » l'équation définissant G, par exemple en écrivant $z = -x-y-z$, pour en déduire que $G = \{(x,y,z,-x-y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$. Ceci prouve que G est un sous-espace vectoriel de E, et la famille donnée dans le Vect étant très clairement libre (en notant e_1, e_2 et e_3 ses trois vecteurs, la condition $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ impose directement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ en regardant seulement les trois premières coordonnées), elle constitue une base de G.
3. On sait déjà que $\dim(F) + \dim(G) = 1+3 = 4 = \dim(E)$, il suffit donc de prouver en plus que leur intersection est réduite au vecteur nul. Pour cela, supposons qu'un vecteur u appartienne à la fois à F et à G, alors $u = (a,a,a,a)$ par définition de F, mais comme u doit aussi vérifier l'équation définissant G, on doit avoir $a+a+a+a = 0$, donc $a = 0$ et $u = 0$. On en déduit que $F \cap G = \{0\}$, les sous-espaces sont bien supplémentaires.