Exercice à travailler n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 septembre 2020

Étude d'une famille de fonctions.

1. La fonction f_n est définie sur $[-2, +\infty[$. En $+\infty$ on est en présence d'une belle forme indéterminée puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-nx} = 0$ lorsque $n \geqslant 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$. Pas d'autre moyen pour l'instant que d'invoquer une croissance comparée pour expliquer que c'est l'exponentielle qui va l'emporter, et qu'on aura donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

2. Si on veut être précis, la fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x+2}e^{-x}$ n'est dérivable que sur $]-2, +\infty[$. Sur cet intervalle, on calcule donc $f_1'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}e^{-x} - \sqrt{x+2}e^{-x} = \dfrac{e^{-x} - 2(x+2)e^{-x}}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{e^{-x}(-2x-3)}{2\sqrt{x+2}}$ après une subtile mise au même dénominateur. Le seul facteur n'étant pas toujours positif dans cette dérivée est $-2x-3$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{3}{2}$, et est positif sur $\left]-2, -\dfrac{3}{2}\right[$. La fonction f_1 admettra donc un maximum en $-\dfrac{3}{2}$, de valeur $\sqrt{\dfrac{1}{2}}e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{\dfrac{e}{2}}$, superbe valeur qu'on peut (à la main) essayer d'approcher comme suit : on sait que $e \simeq 2.7$, donc $\dfrac{e}{2} \simeq 1.35$ et $\sqrt{\dfrac{e}{2}} \simeq 1.2$ (on sait que $\sqrt{121} = 11$ et $\sqrt{144} = 12$, donc $\sqrt{135}$ est sûrement plus proche de 12 que de 11, et on divise par 10), soit $f_1\left(-\dfrac{3}{2}\right) \simeq 3.15$. Bon, environ 3, c'est déjà pas mal. On n'a rien de plus à calculer pour dresser le tableau, puisque bien entendu $f_1(-2) = 0$:

x	-2		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
f_1	0	$\nearrow$	$e\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

3. Pas de forme indéterminée ici, $\lim\limits_{x \to -2} e^{-x}(-2x-3) = e^2 > 0$ et $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x+2} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -2} f_1'(x) = +\infty$ (tout est positif). Puisque les valeurs de la dérivée correspondent aux coefficients directeurs des tangentes à la courbe, on peut donc en déduire que les tangentes, et donc la courbe elle-même, deviennent « de plus en plus verticales » quand on se rapproche de -2. En fait, on pourra même en déduire plus précisément quand on sera un peu plus savants que la courbe admet en son point d'abscisse -2 une tangente verticale.

4. C'est exactement pareil que pour la fonction f_1, on dérive puis on met au même dénominateur : $f_n'(x) = \dfrac{e^{-nx}}{2\sqrt{x+2}} - n\sqrt{x+2}e^{-nx} = \dfrac{e^{-nx}(1 - 2n(x+2))}{2\sqrt{x+2}}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2nx - 4n$, elle s'annule en $x = \dfrac{1-4n}{2n} = -2 + \dfrac{1}{2n}$. La fonction admet pour maximum

$f_n\left(-2+\frac{1}{2n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2n}}e^{2n-\frac{1}{2}} = \frac{e^{2n}}{\sqrt{2ne}}$. Le tableau de variations est très similaire à celui de f_1 :

x	-2	$-2+\frac{1}{2n}$	$+\infty$
f_n	0 $\nearrow$	$\frac{e^{2n}}{\sqrt{2ne}}$	$\searrow$ 0

5. Toutes les courbes se coupent déjà au point de coordonnées $(-2, 0)$. Ensuite, il faut résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$, soit $\sqrt{x+2}e^{-x} = \sqrt{x+2}e^{-2x}$. Puisqu'on a déjà géré le cas de la valeur $x = -2$, on peut simplifier et obtenir $e^x = 1$, soit $x = 0$. Les deux courbes se coupent donc également lorsque $x = 0$, à l'ordonnée $f_1(0) = f_2(0) = \sqrt{2}$. C'est exactement le même calcul dans le cas général, et on obtient les deux mêmes points d'intersection.
6. La seule chose qui nous manque, c'est une valeur approchée du maximum de f_2, qui est atteint pour $x = -\frac{7}{4}$. Ce maximum vaut $\frac{e^4}{\sqrt{4e}}$. Bon, $4e$ est un peu plus grand que 10, sa racine carrée est donc un peu plus grande que 3. Pour le numérateur, c'est nettement plus gros, on sait que $e \simeq 2.7$, ce qui donne un e^2 plus grand que 7, et e^4 de l'ordre de 50. Le quotient est donc plus ou moins loin de 17 (en fait 16.56). Voici l'allure des deux courbes, avec bien sûr les tangentes horizontales et verticales ($\mathcal{C}_1$ en bleu, $\mathcal{C}_2$ en rouge, les points d'intersection en vert) :