Exercice à travailler n° 17 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 mars 2021

Étude d'une famille de polynômes.

1. Calculons donc : $f_0(x) = e^{-x}$, donc $L_0(x) = e^x e^{-x} = 1$. Ensuite, $f_1(x) = xe^{-x}$, donc $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $L_1(x) = e^x f_1'(x) = 1 - x$. De plus en plus passionnant : $f_2(x) = x^2 e^{-x}$, donc $f_2'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ puis $f_2''(x) = (2 - 2x + x^2 - 2x)e^{-x}$ et enfin $L_2(x) = \dfrac{e^x}{2} f_2''(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Dernier calcul : $f_3(x) = x^3 e^{-x}$, $f_3'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x}$, $f_3''(x) = (6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3)e^{-x} = (6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}$, $f_3'''(x) = (6 - 12x + 3x^2 - 6x + 6x^2 - x^3)e^{-x} = (6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}$, donc $L_3(x) = \dfrac{e^x}{6} f_3'''(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 3x + 1$.
2. L'unique racine de L_1 est $x = 1$. Pour L_2, on a un discriminant égal à $4 - 2 = 2$ et donc deux racines $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. Pour L_3 on ne sait pas résoudre l'équation, mais on peut étudier les variations du polynôme, qui a pour dérivée $L_3'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 3$. Le discriminant de cette dérivée est $\Delta = 9 - 6 = 3$, elle s'annule donc en $x_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{-1} = 3 + \sqrt{3} > 0$ et en $x_4 = 3 - \sqrt{3} > 0$. De plus, on peut calculer les images par L_3 de ces valeurs sans faire trop de calculs en étant un peu astucieux : par définition, $x_3^2 = 6x_3 - 6$ (il est racine de L_3) donc $x_3^3 = 6x_3^2 - 6x_3$, puis $L_3(x_3) = -\dfrac{1}{6}x_3^3 + \dfrac{3}{2}x_3^2 - 3x_3 + 1 = -x_3^2 + x_3 + 9x_3 - 9 - 3x_3 + 1 = x_3 - 2 = 1 + \sqrt{3} > 0$. De même, on aura $L_3(x_4) = x_4 - 2 = 1 - \sqrt{3} < 0$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant pour L_3 :

x	$-\infty$		x_4		x_3		$+\infty$
L_3	$+\infty$	↘	< 0	↗	> 0	↘	$-\infty$

   Le polynôme admet donc une racine strictement supérieure à x_4 (dont positive), une deuxième entre x_3 et x_4, donc également positive, et une troisième inférieure à x_4. Or, $L_3(0) = 1$, ce qui suffit à prouver que cette troisième racine se trouve en fait entre 0 et x_4, et qu'il y a donc bien trois racines distinctes strictement positives.
3. Dérivons donc $n + 1$ fois l'égalité $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$ en appliquant la formule de Leibniz au produit de droite. Comme toutes les dérivées du facteur égal à x sont nulles à partir de la dérivée seconde, il n'y aura en fait que deux termes dans la somme : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f_n^{(n+1-k)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)$. Or, par définition, $f_n(n)(x) = n!e^{-x}L_n(x)$ (de même en remplaçant les n par des $n+1$, bien entendu), et on écrira le $f_n^{(n+1)}$ comme la dérivée de $f_n^{(n)}$ pour trouver la relation : $(n+1)!e^{-x}L_{n+1} = x(n!e^{-x}L_n(x))' + (n+1)n!e^{-x}L_n(x)$, soit $(n+1)!e^{-x}L_{n+1} = -xn!e^{-x}L_n(x) + xn!e^{-x}L_n'(x) + (n+1)n!e^{-x}L_n(x)$. On simplifie tout : $L_{n+1}(x) = -\dfrac{x}{n+1}L_n(x) + \dfrac{x}{n+1}L_n'(x) + L_n(x) = \dfrac{x}{n+1}L_n'(x) + \left(1 - \dfrac{x}{n+1}\right)L_n(x)$.

4. En fait, je vous ai encore arnaqués, car bien sûr cette question est facile à partir de la 3 et de la 5, mais la 5 elle-même est plus facile à partir de la 3 et de celle-là. Bref, à un moment donné il faut faire du calcul explicite. Faisons-le maintenant : on peut en fait calculer tout à fait explicitement $L_n(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz appliquée à la fonction f_n. En effet, on sait qu'en posant $g(x) = x^n$, on aura $g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}x^k$, et les dérivées successives de e^{-x} sont toujours égales, à un signe près qui dépend de la parité du nombre de dérivations. Cela donne donc $f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x}$, puis $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Avec cette formule, on calcule facilement $L_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ (on a effectué un changement d'indice, ce qui fait sortir un signe $-$ de la somme pour conserver le $(-1)^k$ intact dans la somme). On calcule maintenant $L'n - L_n$ en isolant la dernier terme de la somme définissant L_n : $L_n' - L_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - (-1)^n \frac{x^n}{n!}$. On peut appliquer la relation de Pascal $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ pour regrouper les deux premières sommes et obtenir $L_n' - L_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - (-1)^n \frac{x^n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = L_{n+1}'$ (le terme qu'on avait sorti de L_n est exactement celui qui manque pour compléter la somme).

5. On dérive la relation de la question 3 : $L_{n+1}'(x) = \frac{1}{n+1} L_n'(x) + \frac{x}{n+1} L_n''(x) - \frac{1}{n+1} L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n'(x)$. Quitte à tout multiplier par $n+1$ et à remplacer le membre de gauche par $L_n'(x) - L_n(x)$ en exploitant la question 4, on a donc $(n+1)L_n'(x) - (n+1)L_n(x) = L_n'(x) + xL_n''(x) - L_n(x) + (n+1-x)L_n'(x)$. On regroupe tout : $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$. Ah ben c'est ce qui était demandé.

   La méthode très bourrine que j'avais initialement en tête consiste à calculer tout explicitement à grands coups de somme : similairement à ce qu'on a fait à la question précédente, $L_n''(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Ensuite, on calcule donc $xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k!} + n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$, soit en notant A le membre de gauche qu'on a la flemme de recopier et en faisant des décalages d'indice dans les sommes où x est élevé à la puissance $k+1$, $A = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{(k-1)!} + n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$. Le terme numéro 0 de la dernière somme vaut n, il se simplifie avec le terme numéro 0 de la deuxième somme (qui vaut n aussi car le coefficient binômial y est égal à n). De même, le terme numéro n de la dernière somme est égal à $n(-1)^n \frac{x^n}{n!} = (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)!}$, il se simplifie avec le terme numéro n de la troisième somme. Les termes correspondant aux indices 1 à $n-1$ apparaissent dans toutes les sommes, et ils vont se simplifier entre eux : quitte à enlever les $(-1)^k$ et les x^k qui sont commun à chaque fois, ils valent en effet $-\frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k+1} - \frac{1}{k!}\binom{n}{k+1} - \frac{1}{(k-1)!}\binom{n}{k} + \frac{n}{k!}\binom{n}{k}$, soit

$-\dfrac{n!}{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!}-\dfrac{n!}{k!(k+1)!(n-k-1)!}-\dfrac{n!}{(k-1)!k!(n-k)!}+\dfrac{n\times n!}{k!k!(n-k)!}$. On factorise tout ce qu'on peut : $\dfrac{n!}{k!(k-1)!(n-k-1)!}\left(-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{n}{k(n-k)}\right)$. La parenthèse est égale à $\dfrac{-k(n-k)-(n-k)-k(k+1)+n(k+1)}{k(k+1)(n-k)}$ $=\dfrac{-nk+k^2-n+k-k^2-k+nk+n}{k(k+1)(n-k)}=0$. Ouf, tout s'annule, ça prouve bien la formule demandée.

6. Supposons que a soit à la fois racine de L_n et de L_{n+1}, alors la relation de la question 3 prouve que $L'_n(a)=0$ (ou $a=0$, mais la formule explicite donnée pour L_n montre que $L_n(0)=1$, donc que 0 n'est jamais racine de L_n). On en déduit alors que a est en fait racine double du polynôme L_n, ce qui n'est pas possible. Ah, on n'a pas encore prouvé que L_n ne pouvait pas avoir de racine multiple, il serait temps de le faire. Supposons qu'il existe un entier n tel que L_n admette une racine (au moins) double, et prenons tant qu'à faire le plus petit n pour lequel ça se produit. Les calculs de début d'exercice prouvent que ce n est au moins égal à 4. En combinant les deux relations des questions 3 et 4, on peut écrire que $L_n=L'_n-L'_{n+1}$, puis $\dfrac{x}{n+1}L_n=L_{n+1}-\left(1-\dfrac{x}{n+1}\right)L_n-\dfrac{x}{n+1}L'_{n+1}$, donc $L_n=L_{n+1}-\dfrac{x}{n+1}L'_{n+1}$. Cette nouvelle relation prouve que, si a est racine double de L_{n+1} (et donc aussi racine de L'_{n+1}), alors a est racine de L_n. Pour ce qui nous intéresse ici, quitte à décaler les indices, notre racine double de L_n est donc une racine de L_{n-1}. Mais alors la relation de la question 3 (décalée à L_n et L_{n-1}) prouve que a est aussi racine de L'_{n-1}. Autrement dit, on a aussi une racine double pour le polynôme précédent de la suite, ce qui contredit évidemment l'hypothèse selon laquelle notre entier n était le premier pour lequel il y a une racine double. Il ne peut donc jamais y avoir de racine double.
7. C'est en fait assez facile en utilisant encore et toujours les relations des questions 3 et 4. À l'aide de la première, quitte à décaler les indices, on peut écrire $(n+2)L_{n+2}(x)=xL'_{n+1}(x)+(n+2-x)L_{n+1}(x)$. On s'empresse de remplacer et de simplifier une première fois : $(n+2)L_{n+2}(x)+(x-2n-3)L_{n+1}(x)+(n+1)L_n(x)=xL'_{n+1}(x)+(n+2-x)L_{n+1}(x)+(x-2n-3)L_{n+1}(x)+(n+1)L_n(x)=xL'_{n+1}(x)-(n+1)L_{n+1}(x)+(n+1)L_n(x)$. On remplace maintenant le terme du milieu en utilisant à nouveau la relation de la question 3 (sans décalage cette fois-ci) et le terme de gauche à l'aide de celle de la question 4, et on trouve alors $xL'_n(x)-xL_n(x)-xL'_n(x)-(n+1-x)L_n(x)+(n+1)L_n(x)$. Parfait, tout s'annule, on a bien prouvé la relation.