Exercice à travailler n° 14 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 janvier 2021

Un exercice bateau de calcul matriciel.

1. On calcule normalement aisément $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour obtenir la relation demandée, on constate que les coefficients « en bas à droite » sont nuls dans la matrice A, et égaux à 1 à la fois dans A^2 et A^3, ce qui impose $a = 1$. L'observation des coefficients restants permet alors de conclure que $b = 2$ (par exemple pour le premier coefficient, on doit avoir $3 + b = 5$), d'où $A^3 = A^2 + 2A$.

2. Supposons que la matrice A soit inversible, alors on pourrait multiplier l'égalité obtenue dans la question précédente par A^{-1} pour obtenir $A^2 = A + 2I_3$. Or, cette dernière égalité est fausse (par exemple pour les deux derniers coefficients de la diagonale, ça ne marche pas), ce qui prouve par l'absude que A n'est pas inversible. Autre possibiluté, simplement invoquer le fait que A contienne deux lignes identiques, ce qui est impossible pour une matrice inversible.

3. (a) C'est la récurrence classique, qu'on commence ici au rang 1 (ça ne marcherait pas pour $n = 0$), en posant simplement $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Comme d'habitude, je complète (ce qui n'est pas nécessaire) l'initialisation en précisant qu'au rang 2, on aura $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$. Supposons maintenant que $A^n = a_nA^2 + b_nA$, et calculons alors $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA^2 + b_nA) \times A = a_nA^3 + b_nA^2 = a_n(A^2 + 2A) + b_nA^2 = (a_n + b_n)A^2 + 2a_nA$. On en déduit la propriété au rang $n + 1$, ainsi que les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.

   (b) Comme d'habitude, la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 : $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. L'équation caractéristique associée $x^2 - x - 2 = 0$ a pour solutions (assez évidentes) $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. On en déduit l'existence de constantes réelles α et β telles que $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n$. Avec les conditions initiales rappelées plus haut, $a_1 = 0 = 2\beta - \alpha$ et $a_2 = 1 = 4\beta + \alpha$, ce qui impose $\beta = \frac{1}{6}$ et $\alpha = \frac{1}{3}$, donc $a_n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$. On en déduit $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$. Finalement, $A^n = \frac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}A^2 + \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}A$.

   (c) Pour $n = 7$, on calcule $a_7 = \frac{-1 + 64}{3} = 21$ et $b_7 = \frac{64 + 2}{3} = 22$, donc $A^7 = 21A^2 + 22A = \begin{pmatrix} 85 & 43 & 43 \\ 43 & 21 & 21 \\ 43 & 21 & 21 \end{pmatrix}$

4. (a) Eh bien, allons-y pour une petite récurrence ! Au rang 1, la formule est effectivement vraie en posant $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ (ce qui correspond bien à la valeur des quatre derniers coefficients de la matrice A^2) et $u_3 = 1$ également (là encore c'est cohérent avec les coefficients de A^2 et de A^3 qui sont censés être égaux à u_3). Supposons maintenant le résultat vrai au rang n, alors on va calculer $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} + 2u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+2} \\ u_{n+1} + 2u_n & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} + 2u_n & u_{n+1} & u_{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui démontre la formule souhaitée au rang $n+1$ à condition d'imposer les deux relations de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ et $u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1}$. Ce qui tombe fort bien, puisqu'il s'agit de la même relation, simplement décalée d'un indice !

(b) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, avec la même équation caractéristique que pour la suite (a_n) de la question 3.*b*. Encore mieux, les conditions initiales sont aussi les mêmes que pour (a_n). Pas besoin du moindre calcul donc pour affirmer que $u_n = \dfrac{(-1)^n + 2^{n-1}}{3}$. On peut alors écrire $A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^n + 2^{n-1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n + 2^{n-1} & (-1)^n + 2^{n-1} \end{pmatrix}$.
On vérifie sans mal que ça donne les mêmes résultats que plus haut pour $n = 7$.

5. On pose brutalement $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis on calcule $AB = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$. Les quatre coefficients « en bas à droite » imposent les conditions $g = d = c = b$. Le coefficient en haut à gauche donne alors $a + b + c = a + 2d$, soit $a + 2b = a + 2b$, condition qui est toujours vérifiée. Continuons sur la première ligne : $a = b + e + h$, donc $h = a - b - e$, puis $a = c + f + i = b + f + i$, donc $i = a - b - f$. Pour l'instant on a réussi à exprimer les coefficients c, d, g, h et i en fonction de a, b, e et f. On passe aux derniers coefficients de la première colonne : $a = d + e + f = b + e + f$, donc $f = a - b - e$ (autrement dit $f = h$), ce qui permet de réécrire l'expression de i en $i = a - b - (a - b - e) = e$, et enfin $a = g + h + i = b + a - b - e + e$ soit $a = a$ qu'on peut éliminer puisqu'elle est toujours vérifiée. Il nous reste donc trois coefficients libres a, b et e, et les six autres qu'on exprime en fonction d'eux : $c = b$, $d = b$, $f = h = a - b - e$ et $i = e$.
Autrement dit, $B = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & e & a-b-e \\ b & a-b-e & e \end{pmatrix}$, avec $(a, b, e) \in \mathbb{R}^3$.