Exercice à travailler n° 12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 janvier 2021

Des histoires d'argent.

1. (a) Il s'agit d'une bête suite arithémtique : $u_{n+1} = u_n + 50$, donc $u_n = 1000 + 50n$. Roger aura doublé son capital quand on aura $u_n = 2000$, donc $1000+50n = 2000$, ce qui donne $n = 20$. Il lui faudra 20 ans pour doubler son capital, et tout à fait logiquement 180 ans pour le décupler (il lui faut 20 années supplémentaires pour acquérir 1000 euros supplémentaires).

2. (a) Il s'agit cette fois d'une suite géométrique : $v_{n+1} = v_n + v_n \times \dfrac{3}{100}$, soit $v_{n+1} = 1.03 \times v_n$, suite géométrique de raison 1.03.

   (b) Comme le premier terme de la suite vaut 1000, on aura donc $v_n = 1000 \times 1.03^n$. Roger doublera son capital quand $v_n = 2000$, soit $1.03^n = 2$. On passe au logarightme pour résoudre : $n \ln(1.03) = \ln(2)$, soit $n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1.03)} \simeq 23.4$. Autrement dit, il devra attendre 24 ans pour doubler son capital (on utilise bien sûr la calculatrice pour obtenir cette valeur approchée). Pour le décupler, on aura de même $n = \dfrac{\ln(10)}{\ln(1.03)}$, Roger doit attendre 78 ans.

   (c) Il faudrait pouvoir résoudre l'équation $1000 \times 1.03^n = 1000 + 50n$ pour répondre à cette question, ce qu'on ne sait pas faire de façon exacte. Toutes les méthodes numériques classiques sont alors bonnes, par exemple la dichotomie (on sait déjà que n se situe quelque part entre 24 et 78 au vu des deux questions précédentes, quelques étapes suffiront à conclure). En pratique, la deuxième suite dépasse la première à partir du terme v_{33}.

3. (a) On a cette fois-ci $w_{n+1} = 1.02 \times w_n + 100$, une belle suite arithmético-géométrique. L'équation de point fixe associée $x = 1.02x + 100$ a pour solution $x = -5\ 000$. La suite auxiliaire définie par $z_n = w_n + 5\ 000$ vérifie alors $z_{n+1} = 1.02w_n + 5\ 100 = 1.02z_n$, donc (z_n) est géométrique de raison 1.02 et de premier terme $z_0 = 6\ 000$. On en déduit $z_n = 6\ 000 \times 1.02^n$, puis $w_n = 6\ 000 \times 1.02^n - 5\ 000$.

   (b) Pour doubler, on doit résoudre $6\ 000 \times 1.02^n - 5\ 000 = 2\ 000$, donc $1.02^n = \dfrac{7}{6}$, ce qui (après passage au logarithme une fois de plus) donne $n \simeq 7.8$. Il ne faudra que 8 ans à Robert pour doubler son pécule, les cours de physique, ça aide. Pour décupler, on obtient de même $1.02^n = \dfrac{3}{2}$, ce qui donne 21 ans pour décupler la somme initiale.

   (c) Malgré les résultats obtenus à la question précédente, c'est bel et bien la suite géométrique (v_n) qui va finir par écraser les deux autres. En effet, le quotient de v_n par w_n a une limite infinie (on factorise par 1.03^n d'un côté, par 1.02^n de l'autre, et on se ramène à une suite géométrique de raison $\dfrac{1.03}{1.02} > 1$). Mais il faut être patient : $v_n > w_n$ lorsque $1.03^n > 6 \times 1.02^n - 5$, ce qui se produit à partir de $n = 182$.