

## Exercice à travailler n° 12

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 12 janvier 2021

### Des histoires d'argent.

Un élève de PTSI (appelons-le Roger) ayant raté sa vocation (vu ce qui va suivre, il aurait manifestement dû s'orienter vers des études commerciales) souhaite faire fructifier l'argent qu'il a obtenu en ~~arnaquant honnêtement~~ donnant de brillants cours à son petit voisin qui découvre les nombres complexes en Terminale. Il dispose d'un capital initial de 1 000 euros qu'il va placer à la banque au premier janvier d'une année que nous noterons 0 par commodité.

1. On propose à Roger un premier placement à intérêts simples à 5% annuels (autrement dit, il ajoutera chaque année à son capital 5% de la somme initialement placée).
  - (a) Si on note  $u_n$  le capital dont disposera Roger au début de l'année  $n$ , de quel type bien connu sera la suite  $(u_n)$  ?
  - (b) En déduire la valeur explicite de  $u_n$ , et calculer combien de temps il faudra à Roger pour doubler son capital, puis pour le décupler (Roger est un être humain assez spécial dont l'espérance de vie dépasse largement celle de ses congénères).
2. On propose à Roger un deuxième placement à intérêts composés à 3% annuels (il ajoutera donc chaque année à son capital 3% du capital accumulé jusque-là. Ainsi, il gagnera 30 euros la première année, mais un peu plus la deuxième année puisqu'on calculera 3% des 1 030 euros dont il dispose désormais).
  - (a) Si on note  $v_n$  le capital dont disposera Roger au début de l'année  $n$  avec ce nouveau placement, de quel type bien connu sera la suite  $(v_n)$  ?
  - (b) En déduire la valeur explicite de  $v_n$ , et calculer combien de temps il faudra à Roger pour doubler son capital, puis pour le décupler.
  - (c) Au bout de combien de temps la valeur de  $v_n$  deviendra-t-elle plus élevée que celle de  $u_n$  ? Si besoin, expliquer comment obtenir cette valeur sans savoir résoudre une équation compliquée.
3. Robert, un bon copain de Roger, dispose aussi d'un capital de 1 000 euros au début de l'année 0. Piètre négociateur, il se fait arnaquer par un banquier malhonnête (pléonasme) et obtient un taux d'intérêt composés de 2% annuels. Mais il continue à donner chaque année des cours de physique au caniche de sa grand-mère qui lui rapportent 100 euros supplémentaires par an, qu'il va ajouter à son capital à chaque fois. On notera  $w_n$  le capital dont disposera Robert au début de l'année  $n$ .
  - (a) Oh, mais la suite  $(w_n)$  ne serait-elle pas par le plus grand des hasards elle aussi une suite d'un type bien connu ? En déduire la valeur explicite de  $w_n$ .
  - (b) Pour changer, estimer au bout de combien de temps Robert aura doublé, puis décuplé son capital.
  - (c) Si on compare les trois suites obtenues, laquelle prendra les plus grandes valeurs à long terme ? À partir de quand  $v_n$  devient-elle supérieure à  $w_n$  ?