# Exercice à travailler n° 11

PTSI B Lycée Eiffel

pour le 14 décembre 2020

## Un classique immarcessible du dénombrement.

1. Il y a trois possibilités pour chacune des neuf cases de la grille, donc $3^9 = 19\ 683$ coloriages possibles (il s'agit bien ici de créer une 9-liste d'éléments choisis dans l'ensemble {bleu, blanc, rouge }.
2. Il n'y a donc plus que deux possibilités pour chaque case, donc seulement $2^9 = 512$ possibilités (ce qui fait énormément moins qu'avec trois couleurs).
3. Il faut commencer par choisir les cinq cases qui seront rouges parmi les neuf cases diponibles, et il reste ensuite deux possibilités (laisser en blanc ou colorier en bleu) pour chacune des quatre cases restantes, ce qui donne $\binom{9}{5} \times 2^4 = 126 \times 16 = 2\ 016$ possibilités.
4. On choisit (par exemple) les trois cases bleues parmi les neuf de la grille, puis les trois cases rouges parmi les six restantes (il n'y a plus rien à choisir ensuite, les trois dernières cases devant rester blanches), soit $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 84 \times 20 = 1\ 680$ coloriages possibles.
5. Le plus simple est de séparer toutes les possibilités :
   - aucune case rouge et aucune case bleue : la grille est donc toute blanche, une seule possibilité.
   - une seule case rouge et une seule case bleue : il faut choisir la case rouge puis la bleue, soit $8 \times 7 = 56$ possibilités.
   - deux cases rouges et deux bleues : on choisit deux cases puis deux autres, soit $\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} = 36 \times 21 = 756$ possibilités.
   - trois cases rouges et trois bleues : c'est exactement ce qu'on a calculé à la question précédente, 1 680 possibilités.
   - quatre cases rouges et quatre cases bleues : toujours le même principe, $\binom{9}{4} \times \binom{5}{4} = 126 \times 5 = 730$ possibilités.
   - cinq cases rouges et cinq cases bleues : il manque une case (je n'irais pas jusqu'à dire que c'est le cas de certains élèves de la classe), et les cas suivants sont bien sûr tout aussi impossibles.

   Au total : $1 + 56 + 756 + 1680 + 730 = 3\ 223$ coloriages avec autant de cases rouges que de bleues.
6. On a donc une case de chaque couleur sur la première ligne, il suffit de choisir l'ordre dans lequel elles apparaissent, ce qui peut se faire de $3! = 6$ façons différentes. De même pour les deux autres lignes, soit au total $6^3 = 216$ coloriages possibles (ce qui est peu même comparé au nombre de coloriages avec trois cases de chaque couleur calculé plus haut).
7. Là encore, on peut (et on doit) distinguer plusieurs cas :
   - comme il y a neuf cases au total, il ne peut pas y avoir moins de quatre cases blueues si on veut que la couleur soit strictement majoritaire (si on ne met que trois cases bleues, il y a aura au moins trois cases rouges ou trois cases blanches, voire les deux à la fois d'ailleurs).

- si on se contente de quatre cases bleues, il faudra avoir pour compléter soit trois cases rouges et deux cases blanches, soit le contraire. Les deux possibilités regroupent le même nombre de cas, il faut à chaque fois choisir les quatre cases bleues, puis trois autres cases parmi celles qui restent, donc $2 \times \binom{9}{4} \times \binom{5}{3} = 2 \times 126 \times 10 = 2\ 520$ cas.
- si on met cinq cases bleues, la couleur sera automatiquement majoritaire, on a donc deux possibilités pour chacune des quatre cases restantes, soit $\binom{9}{5} \times 2^4 = 126 \times 16 = 2\ 016$ cas.
- si on met six cases bleues, même principe : $\binom{9}{6} \times 2^3 = 84 \times 8 = 672$ cas possibles.
- si on met sept, huit ou bien sûr neuf cases bleues, le calcul sera à nouveau très similaire, ce qui ajoute tous les cas suivants : $\binom{9}{7} \times 4 + \binom{9}{8} \times 2 + \binom{9}{9} = 36 \times 4 + 9 \times 2 + 1 = 163$ coloriages supplémentaires.

Au total on obtient donc 5 371 cas avec du bleu majoritaire. Bien sûr, on aurait exactement le même nombre de cas avec une stricte majorité de cases rouges ou blanches, donc il reste $19\ 683 - 3 \times 5\ 371 = 3\ 570$ coloriages où aucune couleur n'est strictement majoritaire. On peut d'ailleurs effectuer le calcul demandé en raisonnant dans l'autre sens : les coloriages sans couleurs strictement majoritaire sont ceux où on a trois cases de chaque couleur (comptés à la question 4, il y en a 1 680) et ceux pour lesquelles la répartition des couleurs est « 4-4-1 ». Pour ces derniers il faut choisir la couleur qui n'apparait qu'une fois, choisir son emplacement, puis choisir quatre cases parmi les huit restantes pour la première des deux couleurs majoritaires, soit $3 \times 9 \times \binom{8}{4} = 27 \times 70 = 1\ 890$ coloriages possibles. On trouve les 3 570 coloriages sans couleur strictement majoritaire, on les retranche alors au nombre total de coloriages avant de diviser par trois.

8. C'est typiquement le genre de question pour laquelle trouver une méthode intelligente est mission impossible, on peut faire du cas par cas assez lourd. Dans ce qui suit, j'appelle « bords » les cases qui ne sont ni au centre ni dans les coins de la grille. On va partir de l'hypothèse que la case centrale est blanche (les autres cas sont identiques à permutation des couleurs près, on multipliera donc par trois à la fin), et distinguer selon les couleurs utilisées pour les bords (dont aucun ne doit être blanc puisqu'ils sont adjacents à la case centrale) :
   - si les quatre bords sont de la même couleur (soit rouges soit bleus), on a deux couleurs possibles pour chacun des coins (blanc ou bleu/rouge selon la couleur des bords), ce qui fait $2 \times 2^4 = 32$ cas.
   - si trois bords sont de la même couleur (qu'il faut choisir) et le dernier bord (à choisir parmi quatre possibilités) de l'autre couleur, on aura deux coins nécessairement blanc (ceux qui sont adjacents à la couleur n'apparaissant que sur un bord) et deux pour lesquels on a deux possibilités, donc $2 \times 4 \times 2^2 = 32$ cas à nouveau.
   - si on a deux bords de chaque couleur et que les bords de même couleur sont à l'opposé l'un de l'autre (par exemple bords bleus en haut en bas, bords rouges à gauche et à droite), les quatre coins sont nécessairement blancs, il n'y a que 2 cas concernés (on peut échanger les couleurs des bords par rapport à l'exemple décrit dans la parenthèse précédente et c'est tout).
   - enfin, si on a deux bords de chaque couleur, mais pas opposés (il y a quatre dispositions possibles pour les deux bords bleus : haue-droite, bas-droite, bas-gauche et haut-gauche), on a deux coins nécessairement blancs et deux avec deux possibilités, donc $4 \times 2^2 = 16$ cas supplémentaires.

   On a fait le tour, au total on trouve donc $3 \times (32 + 32 + 2 + 16) = 246$ coloriages corrects.

   Pour information j'ai fait tourner un programme Python extrêmement brutal (qui teste les 19 683 coloriages et regarde lesquels sont corrects) et il trouve comme moi.