

Exercice à travailler n° 10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

7 décembre 2020

Étude géométrique d'une fonction complexe classique.

1. Calculons : $f(2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $f(2+i) = 1 + \frac{1}{2}i - \frac{1}{4+2i} = 1 + \frac{1}{2}i - \frac{4-2i}{20} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$,
et enfin $f(1-i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2-2i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{2+2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$.
2. Il s'agit cette fois de résoudre des équations : $\frac{z}{2} - \frac{1}{2z} = 0$ donne en multipliant tout par $2z$ (de toute façon $z = 0$ est une valeur interdite) $z^2 - 1 = 0$, donc $z = \pm 1$. Le nombre 0 a donc deux antécédents par f , qui sont 1 et -1 .
Plus intéressant, l'équation $f(z) = i$ se traduit par $z^2 - 1 - 2iz = 0$. On a le droit d'être bien réveillé et de reconnaître l'identité remarquable $(z-i)^2 = z^2 - 2iz - 1$, ce qui implique assez directement que l'unique antécédent de i par f est le nombre i lui-même. Sinon on résout l'équation par un classique calcul de discriminant : $\Delta = (-2i)^2 + 4 = 0$, et on retrouve la racine double égale à i .
Enfin, l'équation $f(z) = -2i$ se traduit par $z^2 - 1 + 4iz = 0$. Cette fois-ci on n'échappera pas à un calcul de discriminant : $\Delta = (4i)^2 + 4 = -12$. Heureusement, le discriminant étant réel, pas besoin de calcul compliqué, on obtient immédiatement les deux antécédents $z_1 = \frac{-4i - 2i\sqrt{3}}{2} = (-2 - \sqrt{3})i$ et $z_2 = (-2 + \sqrt{3})i$.
3. On résout donc l'équation $f(z) = z$, soit $\frac{z}{2} - \frac{1}{2z} = z$, donc $-\frac{1}{2z} = \frac{z}{2}$. On en déduit, toujours en multipliant par $2z$, que $-1 = z^2$. Il y a donc deux complexes invariants par f : i et $-i$.
4. Si z est un nombre complexe de module 1, on peut l'écrire $z = e^{i\theta}$, et dans ce cas $\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$. En découle $f(z) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin(\theta)$, qui est effectivement un nombre imaginaire pur.
5. Quel que soit le nombre complexe a , l'équation $f(z) = a$ peut s'écrire sous la forme $z^2 - 2az - 1 = 0$, équation du second degré qui admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$ (solutions qui ne peut pas être nulles puisque $0^2 - 2a \times 0 - 1$ ne peut pas s'annuler, il n'y a donc aucun risque de tomber sur la valeur interdite). Le nombre a admet donc nécessairement des antécédents (deux la plupart du temps) et f est bien surjective.
6. Il est grand temps de poser $z = a + ib$ pour calculer $f(z) = \frac{1}{2} \left(a + ib - \frac{1}{a + ib} \right) = \frac{1}{2} \left(a + ib - \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right) = \frac{(a + ib)(a^2 + b^2) - a + ib}{2(a^2 + b^2)}$. Ce nombre est réel si sa partie imaginaire est nulle, donc si $b(a^2 + b^2) + b = 0$, ce qui implique $b = 0$ ou $a^2 + b^2 + 1 = 0$. La deuxième condition ne pouvant manifestement jamais être vérifiée ($a^2 + b^2$ est un nombre réel strictement positif), les seuls nombres ayant une image réelle par f sont tout simplement les nombres réels.

7. En reprenant le calcul précédent, on doit cette fois avoir la partie réelle de $f(z)$ qui s'annule, donc $a(a^2 + b^2) - a = 0$, ce qui implique $a = 0$ ou $a^2 + b^2 - 1 = 0$. On reconnaît facilement dans ces deux conditions l'ensemble des imaginaires purs (ce qui est cohérent avec les calculs des deux premières questions) et l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (ce qui confirme le calcul de la question 4). La représentation graphique de ces ensembles étant vraiment complètement triviale, je m'en passerai.