

Feuille d'exercices n° 12 : Polynômes

PTSI B Lycée Eiffel

25 février 2021

Exercice 1 (*)

Soient P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (*)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P .
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leq 5 - 6e^{-x}$

Exercice 3 (* à ***)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P(X) = X^6 + 1$
2. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (on trouvera un entier $n \leq 5$ racine double de P).
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
5. $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 4 (**)

1. Déterminer la forme algébrique des racines carrées des nombres complexes $\frac{i + \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{i - \sqrt{3}}{2}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de $X^6 - i$.
3. Résoudre l'équation $z^6 = i$ en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 5 (**)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- P est de degré 3, $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
- $(X+3)P(X) = XP(X+1)$
- P est de degré 3 ; $(X+1)^2$ divise $P+1$ et $(X-1)^2$ divise $P-1$.
- $(X^2+4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Exercice 6 (**)

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants :

1. $P(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 + 2X - 1$
2. $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, et $Q(X) = X^2 - 3X + 1$
3. $P(X) = X^4 - 2X^2 \cos(2\theta) + 1$ et $Q(X) = X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$
4. $P(X) = X^3 - iX^2 - X$, et $Q(X) = X - 1 + i$,
5. $P(X) = (X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ et $Q(X) = X^2 + 1$

Exercice 7 (***)

On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos(\theta))$.
5. Déterminer les racines de P , et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -5 \end{cases}$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines x , y , et z , et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.

Exercice 9 (***)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $n + 1$ polynômes de degré n en posant $\forall k \in \{0; \dots; n\}$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$.

1. Que valent les polynômes $B_{3,k}$ pour les différentes valeurs de k pour lesquelles ils sont définis ?
2. Étudier rapidement les polynômes $B_{3,k}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et tracer une allure de leurs courbes représentatives sur ce même intervalle.
3. Que vaut $\sum_{k=0}^{k=3} B_{3,k}$? Généraliser ce résultat, et en déduire que $\forall x \in [0, 1]$, $B_{n,k}(x) \in [0, 1]$ (quelles que soient les valeurs de n et de k).
4. Exprimer le polynôme dérivé $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1;k-1}$ et de $B_{n-1,k}$.
5. On pose $f(x) = x$, et on note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k}(x)$.
Montrer que, $\forall x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.
6. Effectuer la même démonstration qu'à la question précédente en prenant cette fois-ci $f(x) = x^2$.

Problème (***)

Ce problème présente une méthode pour calculer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, qui fait intervenir des polynômes (et un petit peu de trigonométrie). Si vous êtes sages, nous verrons d'autres méthodes pour calculer cette même « somme infinie » (on parlera de séries d'ici la fin de l'année) dans certains chapitres ultérieurs.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative de cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.
2. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
 - (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n .
 - (b) Déterminer les racines du polynôme Q_n (on doit trouver $n-1$ nombres imaginaires purs).
 - (c) Vérifier que ces racines sont simples, et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On définit, toujours pour $n \geq 1$, un nouveau polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k$.
 - (a) Donner les expressions explicites des polynômes P_1 , P_2 et P_3 .
 - (b) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
 - (c) En déduire les racines de P_n , et vérifier qu'elles sont simples.
 - (d) Que vaut la somme des racines de P_n ?
En déduire que $\sum_{k=1}^n \left(\cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. (a) Montrer que, $\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
(b) En déduire que, sur le même intervalle, $\cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2(x)$.
(c) Appliquer l'encadrement précédent à $x = \frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$, puis la valeur de la limite recherchée dans cet exercice.
5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}$:
 - (a) Montrer par récurrence que, si $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\left(\sum_{k=1}^n z_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$.
 - (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \left(\cotan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right)^4$ (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme P_n).
 - (c) Conclure.