

Feuilles d'exercices n° 2 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

15 septembre 2020

Vrai/Faux

On doit être capable de répondre correctement et sans hésiter à toutes ces questions, même un an après avoir suivi le cours correspondant.

1. La partie entière d'un nombre x négatif est toujours supérieure à x .
2. La dérivée d'une fonction réciproque est donnée par la formule $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.
3. Toutes les fonctions exponentielles sont strictement croissantes.
4. La fonction $\log_a$ a pour réciproque la fonction $x \mapsto a^x$.
5. La fonction ch est une fonction paire.

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$
2. $f(x) = e^x \ln(x + 5)$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$
2. $f(x) = \ln|x|$
3. $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$
4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

3. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leq \ln 2$
4. $\frac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geq -1$
5. $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$
6. $\ln(x+3) + \ln(x-1) = 2 \ln 2$
7. $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4$
8. $\ln(2x-3) \leq \ln 5$
9. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
10. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
11. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
12. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
13. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leq 4$
14. $\begin{cases} x + y = 520 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$
15. $4 \operatorname{ch}(x) + 3 \operatorname{sh}(x) - 4 = 0$
16. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$
17. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ (en posant $X = x + \frac{1}{x}$)

Exercice 4 (**)

Déterminer **sans calculer leur dérivée** les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 5 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2-x-1}$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$
7. $f(x) = x^{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$, a étant une constante positive fixée.

Exercice 6 (**)

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation $(E) : x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x} \ln(x) + \ln(2)$. Donner le domaine de définition de f , et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction f , et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\frac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. On va chercher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \frac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$.
 - (b) En déduire que n doit être pair puis, en posant $n = 2p$, que $2^{p-1} = p$.
 - (c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
5. Conclure en donnant les solutions de l'équation (E) .

Exercice 7 (**)

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Étudier la parité de f .
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 8 (**)

On définit pour tout entier naturel n la fonction f_n par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

1. Étudier la parité de la fonction f_n (on pourra distinguer deux cas).
2. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_n$.
3. Calculer la dérivée f'_1 de la fonction f_1 , puis étudier ses variations. Faire également le tableau de variations de la fonction f_2 .
4. Généraliser l'étude des variations à f_n (toujours en distinguant deux cas).

5. En notant y_n le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_n , déterminer la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$. Existe-t-il un majorant commun à toutes les fonctions f_n ?
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celle de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+2}$.
7. Calculer la dérivée seconde f_1'' de la fonction f_1 , et déterminer les réels pour lesquels $f_1''(x) = 0$. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en son point d'abscisse a , où a est le seul réel strictement positif vérifiant $f_1''(x) = 0$.
8. Tracer une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dans un même repère.

Exercice 9 (**)

On cherche dans cet exercice à étudier la fonction f définie par $f(x) = x + 2 \ln(\operatorname{ch}(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f .
2. Calculer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(\ln(2))$ et $f(-\ln(3))$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f , puis dresser le tableau de variations de f (sans limites pour l'instant).
4. En factorisant $\operatorname{ch}(x)$ par e^x ; prouver que la droite d'équation $y = 3x - 2 \ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$. Préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote.
5. Effectuer un calcul similaire en $-\infty$, avec une factorisation légèrement différente du ch .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f , ainsi que de ses deux asymptotes obliques.

Exercice 10 (**)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x(\ln(x))^n$ (les fonctions f_n sont donc définies sur $\mathbb{R}^{+*}$), et on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .

1. Quelles sont les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition ?
2. Effectuer l'étude des variations des fonctions f_1 et f_2 (on dressera un tableau de variations complet à chaque fois).
3. Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Vérifier plus généralement qu'il existe deux points du plan qui sont communs à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.
4. Étudier plus généralement les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
5. Que peut-on dire des positions de toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (soyez le plus précis possible) ?
6. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
7. Généraliser les résultats de la question 2 en étudiant les variations de f_n pour tout entier $n \geq 1$ (on pourra distinguer deux cas suivant la parité de n).

Exercice 11 (***)

On définit la fonction f par l'équation $f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$.

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. On va commencer l'étude de f par celle de ses limites et asymptotes.
 - (a) Déterminer rigoureusement la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

- (b) Étudier le signe de $x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$, et en déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (c) En posant $x = \frac{2}{u}$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2$. En déduire la présence d'une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$, dont on précisera l'équation.
3. On va maintenant passer à l'étude des variations.
- (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f .
- (b) On pose $g(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$. Effectuer une étude complète de la fonction g (la courbe n'est pas demandée).
- (c) Déduire de la question précédente que, $\forall x > 0, g(x) > 0$, en déduire le tableau de variations de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 1 (on donnera si besoin des valeurs approchées de son coefficient directeur et de son ordonnée à l'origine).
5. Tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente calculée à la question précédente dans un même repère.

Problème 1 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

I. Étude de f et de sa réciproque.

- Étudier les variations et limites de la fonction f .
- (a) Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f et vérifier qu'elle s'annule en une unique valeur α .
- (b) Donner l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α . En quel point (T) coupe-t-elle l'axe des abscisses ?
- (c) Étudier la position relative de (T) et de $\mathcal{C}_f$ (on pourra dériver deux fois la différence des deux équations si besoin).
- Tracer dans un même repère (T) et $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que la fonction f est bijective de $[-1; +\infty[$ vers un intervalle à préciser. On note g la réciproque de la fonction f sur cet intervalle. Donner le tableau de variations complet de la fonction g .
- Exprimer la dérivée g' de la fonction g en fonction de x et de $g(x)$, sans utiliser d'exponentielle. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction g .
- Montrer que l'équation $2^x = x$ admet pour solution $x = -\frac{g(-\ln(2))}{\ln(2)}$ (qu'on ne cherchera bien sûr pas à expliciter plus).
- Exprimer de même une solution de l'équation $x^x = 3$ en faisant intervenir la valeur $g(\ln(3))$.

II. Des fonctions auxiliaires.

On considère désormais, pour tout réel $a > 0$, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(x) = e^{-x} + ax^2$.

- Établir le tableau de variations de la fonction h_a (en exploitant les résultats de la première partie). On montrera en particulier que h_a admet un minimum en un point m_a que l'on exprimera en fonction de a et à l'aide de la fonction g . Montrer que $h_a(m_a) = am_a(m_a + 2)$.

2. On note enfin i la fonction $i : a \mapsto m_a$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de la fonction i ainsi que ses limites.
3. Montrer que la valeur du maximum de h_a est une fonction croissante du paramètre a , et déterminer sa limite lorsque a tend vers $+\infty$.

Problème 2 : Un peu de géométrie ! (**)

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall a \in [0, 1]$, $a(1-a)^2 \leq \frac{4}{27}$.
2. On fixe désormais une valeur de $a \in [0, 1]$, et on pose $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$.
 - (a) Déterminer le maximum de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1-a]$.
 - (b) En déduire la propriété suivante : si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c=1$, alors $abc \leq \frac{1}{27}$.
 - (c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?
3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs x, y et z , on a $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

Soit $p > 0$. On considère un triangle de côtés a, b et c tels que $a+b+c=2p$ (autrement dit, p est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. On note $x = p-a, y = p-b$ et $z = p-c$, justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$ (en fonction de p).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?

Problème 3 (***)

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction : la fonction **tangente hyperbolique** ou **th** définie par $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que **th** est définie sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Déterminer la parité de **th**.
2. Calculer la dérivée de la fonction **th** et vérifier que $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$. En déduire le tableau de variations de **th** et prouver qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction **th** en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.

4. Simplifier, pour un réel x quelconque, l'expression de $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$ ainsi que celle de $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$. En déduire que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y))$, et $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(y))$.
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{ch}(x+y)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(y)$ et $\operatorname{sh}(y)$.
6. Démontrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th .

On note Argth la fonction réciproque de la fonction th , définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe de la fonction Argth , si possible dans le même repère que celle de la question I.3.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction Argth .
3. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{Argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$, et en déduire une expression de Argth à l'aide de la fonction $\ln$. Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de Argth est correcte.
4. On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.
 - (a) Déterminer la domaine de définition de f .
 - (b) En posant $y = \operatorname{ch}(x)$, montrer que $f(x) = \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
 - (c) En déduire que $f(x) = \frac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle (pour aller beaucoup plus loin).

On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est une solution du problème.
3. Soit f une solution, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
4. Vérifier que, si f est solution, $-f$ également, et $g : x \mapsto f(kx)$ également (quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction f sont comprises entre -1 et 1 .