

Feuille d'exercices n° 4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2020

Exercice 1 (***)

1. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : 2^n \leq n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, initialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leq n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leq 2n! \leq (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : (1+x)^n \geq 1+nx$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $(1+x)^0 \geq 1$, ce qui est vrai puisque $(1+x)^0 = 1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée au rang n , on a alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$ par hypothèse de récurrence. Or, $(1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ puisque nx^2 est toujours un nombre positif. On en déduit que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, ce qui est la propriété P_{n+1} . La propriété P_n est donc vraie pour tout entier n . On peut remarquer que cette propriété est très facile à prouver sans récurrence, à l'aide de la formule du binôme : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k = 1+nx + \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} x^k \geq 1+nx$ (on vérifie à la main les cas $n = 0$ et $n = 1$).
3. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n , on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n = 4$), qui a deux diagonales. Comme $\frac{4 \times 1}{2} = 2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la propriété vraie au rang n , et essayons de la prouver au rang $n+1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale). Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n-1 + \frac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $= \frac{2n-2+n^2-3n}{2} = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.
5. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x) = (x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n e^{-x} - (-1)^n(x-n-1)e^{-x} = ((-1)^{n+1}(x-n-1) + (-1)^n)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n-1-1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-(n+1)-1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1} . La formule est donc vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 2 (**)

On calcule $u_1 = 2$, $u_2 = 8$, $u_3 = 26$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 3^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 3^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n , alors $u_{n+1} = 3u_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1} . Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 1$.

Exercice 3 (**)

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1} , et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n .

Exercice 4 (***)

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété $P_n : u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0 , P_1 et P_2 , ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n , P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2 + 3n + 2) - 3(n^2 + n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3} , et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n .

Exercice 5 (*)

1. $S_1 = \sum_{i=3}^{i=12} 2^i$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} 2i(-1)^{i+1}$

Exercice 6 (** à ***)

- $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
- $\sum_{k=2020}^{k=945} 3 = 3 \times 1\,076 = 3\,228$
- $\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1) = 6 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n = n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2 + 5n + 4)$
- $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} = -\frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$

- $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2 - 1) = 2 \sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1) - 1)}{2}$
 $= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1 - \frac{1}{3^{19}}}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
- $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9} - 1 = \frac{9^{n+1} - 1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1} - 9}{8}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
 $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9} \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 7 (**)

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \frac{ak^2 + ak + bk^2 - b + ck^2 + ck}{k(k^2 - 1)}$.
 En identifiant, on obtient les conditions $a + b + c = 0$; $a + c = 1$ et $-b = -5$, soit $b = 5$ puis $a = -2$ et $c = -3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1} = -2 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} + 5 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k+1} =$
 $-2 \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} + 5 \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=3}^{k=n+1} \frac{1}{k} = -2 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - 2 - 1 + 5 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} + \frac{5}{2} + \frac{5}{n} - 3 \sum_{k=3}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} =$
 $-\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}.$

Exercice 8 (**)

1. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = (n+1)^3 - 1.$
2. Comme $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$, on a $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1.$
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1$, soit en utilisant le résultat de la première question $3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = (n+1)^3 - 1$, ou encore $3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 =$
 $n^3 + 3n^2 + 3n.$ Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $3 \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 -$
 $\frac{3}{2}n - n = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$ On retrouve donc la formule $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Exercice 9 (***)

- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} j^3 + j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$
- $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=n} j + 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{2}$
- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n} \left(\sum_{i=1}^{i=j} (j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n} (i-j) \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} - (n-j)j \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(j^2 - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} - (n+1) + n \right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1} - 1 - 1) = n(n+1)(2^n - 1)$

Exercice 10 (**)

- $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n}$
- $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} (k-1) \prod_{k=2}^{k=n} (k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n} k \right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$
- $\prod_{k=1}^{k=n} (6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n} 3(2k-1) = 3^n \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1) = 3^n \frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n \frac{(2n)!}{2^n \times n!} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 11 (***)

1. $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1$. Cette somme est constituée de $n + 1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 8 \sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12 \sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6 \sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + n + 1 = (n+1)(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n+1) = (n+1)(2n^3 + 6n^2 + 5n + 1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k \leq 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k \leq 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = T_n + S_n$.

4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2 + 4n + 1) = 2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 = 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0} (2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1) + (2n+3)^3 = (n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 4n + 1) + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2 + 4(n+1) + 1) = (n^2 + 4n + 4)(2n^2 + 8n + 7) = 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28 = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$. Ça marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Exercice 12 (***)

- Prouvons l'égalité des deux ensembles par double inclusion. Supposons d'abord que $x \in A \Delta B$. Par hypothèse, $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. On a donc soit $x \in A$, soit $x \in B$, et dans les deux cas $x \in A \cup B$. Par contre, x ne peut pas appartenir à la fois à A et B sinon il ne serait ni dans $A \setminus B$ (puisqu'il appartiendrait à B) ni dans $B \setminus A$ (symétriquement il appartiendrait à A). Donc $x \notin A \cap B$, et on a bien prouvé que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dans l'autre sens, supposons maintenant que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Puisque $x \in A \cup B$, on a soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$, et donc $x \in A \setminus B$. De même, si $x \in B$, alors $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas, $x \in A \Delta B$, et les deux ensembles sont donc bien égaux.
Pour ceux qui préfèrent travailler directement sur les propriétés des opérations élémentaires sur les ensembles : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (on a utilisé en cours de route les lois de Morgan et la distributivité de l'intersection par rapport à l'union).
- C'est particulièrement pénible à faire à la main, mais on va procéder par double inclusion et utiliser le résultat de la question précédente. Supposons pour commencer que $x \in (A \Delta B) \Delta C$. On a donc $x \in (A \Delta B) \cup C$, mais $x \notin (A \Delta B) \cap C$. Première possibilité : $x \in A \Delta B$ et $x \notin C$. Dans ce cas, on a soit $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$, soit $x \in B$, $x \notin A$ et $x \notin C$. Bref, x appartient à exactement un ensemble parmi A , B et C (mais pas à C). Deuxième possibilité : $x \in C$ et $x \notin A \Delta B$. Là encore il y a deux choix possibles : $x \notin A \cup B$, auquel cas x appartient à l'unique ensemble C (le cas qui nous manquait tout à l'heure) ; soit $x \in A \cup B$, mais $x \in A \cap B$ pour ne pas être dans $A \Delta B$, ce qui revient à dire que $x \in A \cap B \cap C$. Si on résume on a prouvé que $(A \Delta B) \Delta C = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap C)$. Si on échange le rôle des ensembles A , B et C , cette dernière expression reste exactement la même, ce qui prouve que $A \Delta (B \Delta C)$ est le même ensemble (en fait on n'a pas vraiment fait de double inclusion).
- Allons-y pour une démonstration à coup d'ensembles : $A \cap (B \Delta C) = A \cap (B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$ (les deux autres ensembles de l'union étant vides). De l'autre côté, $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap B \cap (\overline{A \cap C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A \cap B}))$, ce qui est bien la même chose puisqu'on peut supprimer les $\overline{A}$ dont l'intersection avec A sera évidemment vide.
- Pour que $A \Delta B$ soit vide, il faut que $A \cap B = A \cup B$, ce qui ne peut être le cas que si $B = A$ (sinon, en reprenant la définition initiale, on soit avoir $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, soit $A \subset B$ et $B \subset A$, et on conclut de même).
- Cette fois, on doit avoir $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui impose $B = \overline{A}$.
- Supposons donc X fixé, et soit $x \in X$. L'élément x doit appartenir à $A \Delta B$. S'il appartient à A , il ne doit donc pas être dans B , et vice versa. Autrement dit, B doit contenir l'ensemble $X \setminus A$, mais

un autre élément de X . Prenons maintenant un élément y n'appartenant pas à X , cette fois y ne doit pas être dans $A \Delta B$. S'il est dans A , il doit donc être aussi dans B , mais s'il n'est pas dans A , il ne doit pas être dans B non plus. Autrement dit, B doit contenir $A \setminus X$, mais aucun autre élément de $\overline{X}$. Il n'y a donc qu'une possibilité : $B = (A \setminus X) \cup (X \setminus A)$, c'est-à-dire tout bêtement $B = A \Delta X$.

Exercice 13 (**)

- L'application f_1 est injective puisque, si n et p sont deux entiers naturels, $n+5 = p+5 \Rightarrow n = p$ (ce serait d'ailleurs tout aussi vrai avec des réels quelconques), mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1 (si l'application était définie sur $\mathbb{R}$ ou même sur $\mathbb{R}$, 0 aurait évidemment pour antécédent -5 , mais en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, elle n'est pas surjective).
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = p^2 \Rightarrow n = p$ quand n et p sont positifs (si vous préférez, on peut dire que l'application carré est injective sur $\mathbb{R}_+$, donc a fortiori sur $\mathbb{N}$. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2 (il aurait deux antécédents dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais ces nombres ne sont pas vraiment entiers).
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et vice-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont facilement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p , et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche. En fait, on peut faire plus rapide en prouvant que f_3 est bijective et que sa réciproque est f_3 elle-même (on parle alors d'application **involutive**). En effet, si n est pair, $f_3(n) = n+1$ est un nombre impair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n+1) = n+1-1 = n$. De même, si n est impair, $n-1$ est pair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n-1) = n-1+1 = n$. Dans tous les cas, $f_3(f_3(n)) = n$, ce qui signifie bien que $f_3^{-1} = f_3$ (et au passage que f_3 est bijective).
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4 , qui sont $3p$, $3p+1$ et $3p+2$).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p .

Exercice 14 (*)

1. On reconnaît bien sûr la fonction th , que nous avons déjà croisée dans un précédent problème. Mais plutôt que de passer par une étude de fonction, nous allons étudier l'injectivité et la surjectivité de f « à la main », en revenant aux définitions. Supposons que, pour deux réels x et x' , on ait $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{x'} - e^{-x'}}{e^{x'} + e^{-x'}}$. En faisant le produit en croix et en développant tout brutalement, on obtient $e^{x+x'} + e^{x-x'} - e^{x'-x} - e^{-x-x'} = e^{x+x'} + e^{x'-x} - e^{x-x'} - e^{-x-x'}$, soit encore en simplifiant $2e^{x-x'} = 2e^{x'-x}$. La fonction exponentielle étant bijective, cela implique $x - x' = x' - x$, soit $2x = 2x'$ et donc $x = x'$. Conclusion : l'application f est injective.
Pour la surjectivité, on peut aussi s'en sortir de façon élémentaire en cherchant quelles sont les valeurs de y pour lesquelles l'équation $f(x) = y$ admet (au moins) une solution. Ici, il faut donc tenter de résoudre l'équation $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$, soit $e^x - e^{-x} = ye^x + ye^{-x}$. En regroupant différemment, on trouve $e^x(1-y) = e^{-x}(1+y)$, ou encore $e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$. Il est déjà évident que la fonction n'est pas surjective puisque $y = 1$ ne peut pas avoir d'antécédent, l'équation étant alors impossible. Mais on peut dire beaucoup mieux : l'équation a une solution si et seulement si $\frac{1+y}{1-y} > 0$, c'est-à-dire $y \in]-1, 1[$, et on peut alors écrire $x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$. Autrement, l'application f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$, et de réciproque $f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$.
2. La fonction g est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2 + 1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus, les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ (ce sont les mêmes que

celles de $x \mapsto x^3$), donc la fonction prend toutes les valeurs réelles. Autrement dit, g est surjective et injective, c'est-à-dire bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h . Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Le trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, $\mathcal{D}_h = E$. Sur cet ensemble (ou presque, la fonction n'est pas dérivable en -1 ni en 2), h a pour dérivée $h'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Cette dérivée est du signe de $2x-1$, donc positive si $x \geq 2$ et négative si $x \leq -1$. La fonction h est donc décroissante sur $] -\infty; -1]$ et croissante sur $[2; +\infty[$. Les images de -1 et 2 par h sont toutes les deux nulles. Quant aux limites à l'infini, elles sont toutes les deux égales à $+\infty$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine tend vers $+\infty$ des deux côtés. La fonction h est donc surjective sur $\mathbb{R}_+$ (tous les réels positifs ont bien des antécédents pas la fonction), mais pas injective puisque par exemple $g(-1) = g(2) = 0$. En fait, tout réel positif a exactement deux antécédents par h , un dans l'intervalle $] -\infty; -1]$ et un autre dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

4. La fonction i est bien dérivable sur l'ensemble E , et sa dérivée vaut $\frac{3(x-1)-(3x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$. Cette dérivée est négative partout où elle existe, la fonction i est donc strictement décroissante sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On ne peut bien sûr PAS en déduire que i est injective sur E car celui-ci est constitué de deux intervalle disjoints. Calculons donc les limites de i . Du côté des infinis, on prend le quotient des termes de plus haut degré, ce qui donne pour limite 3 à chaque fois. En 1, le numérateur tend vers 5, et le dénominateur vers 0, en étant positif à droite et négatif à gauche de 1. Autrement dit, $\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = +\infty$. Résumons tout ceci dans un beau tableau :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	3	$+\infty$ $-\infty$	3

On peut constater que la fonction est injective puisqu'elle ne reprend jamais sur $]1; +\infty[$ une valeur déjà prise sur $] -\infty; 1[$ (et qu'elle est injective sur chaque intervalle puisque strictement décroissante). Elle est également surjective sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, puisque tous les réels de l'intervalle $] -\infty; 3[$ ont un antécédent dans $] -\infty; 1[$, et tous les réels de l'intervalle $]3; +\infty[$ ont un antécédent dans $]1; +\infty[$. Conclusion, la fonction i réalise une bijection de E vers F .

Exercice 15 (***)

Supposons donc dans un premier temps que f est injective, et essayons de prouver qu'elle est surjective. Pour cela, prenons un élément $y \in E$ et essayons de lui trouver un antécédent. On sait par hypothèse que $f(f(f(y))) = f(y)$. Les deux éléments $f(f(y))$ et y ont donc la même image par f , ce qui implique, l'application étant injective, qu'ils sont égaux, c'est-à-dire que $f(f(y)) = y$. On vient de trouver un élément qui est un antécédent de y par f : c'est $f(y)$! En effet, $f(f(y)) = y$. L'application f est donc surjective.

Supposons désormais que l'application f est surjective, et essayons de prouver qu'elle est injective. Pour cela, considérons deux éléments x et x' dans E qui ont la même image par f . Comme f est surjective, ces deux éléments ont des antécédents, que nous nommerons z et z' , par f . On a donc $f(f(z)) = f(x) = f(x') = f(f(z'))$. De même, z et z' ont des antécédents w et w' par f , qui vérifieront cette fois-ci $f(f(f(w))) = f(f(f(w')))$. mais, d'après l'énoncé, $f(f(f(w))) = f(w)$ et $f(f(f(w')))) = f(w')$. On en déduit donc que $f(w) = f(w')$, c'est-à-dire que $z = z'$. Mais alors on a certainement $f(z) = f(z')$, soit $x = x'$. On a bien prouvé l'injectivité de l'application.

Dans le cas où f est bijective, on peut composer la relation initiale par f^{-1} pour obtenir $f^{-1} \circ f \circ f \circ f = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f \circ f = id_E$. Cela signifie que f est alors sa propre réciproque (ce qui découle aussi du calcul effectué dans la première partie de la démonstration, où l'antécédent trouvé pour y n'est autre que son image par f).

Exercice 16 (**)

1. La fonction f_A n'est sûrement pas injective puisque, par exemple, $f_A(2) = f_A(4) = 1$. Par contre, elle est surjective, car 1 et 0 ont chacun un bon paquet d'antécédents (tous les nombres entiers pairs et tous les impairs respectivement).
2. La fonction f_A n'est pas surjective dans deux cas : si 0 n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire si f_A est l'application constante égale à 1 ; et si 1 n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire si f_A est constante égale à 0. Cela revient à dire que $A = \mathbb{N}$ ou $A = \emptyset$.
3. Vérifions bêtement à la main : si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $f_A(x) \times f_B(x) = 1 \times 1 = 1$. Dans tous les autres cas, on a soit $f_A(x) = 0$, soit $f_B(x) = 0$, donc $f_A(x) \times f_B(x) = 0$. Cela prouve bien que $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$. Pour la deuxième égalité, on peut par exemple vérifier au cas par cas qu'on a toujours $f_A(x) + f_B(x) = f_{A \cup B}(x) + f_{A \cap B}(x)$. En effet, si x appartient aux deux ensembles, il appartient aussi à la réunion et à l'intersection, et on obtient $1 + 1 = 1 + 1$, ce qui est vrai. S'il n'appartient à aucun des deux, on trouve $0 + 0 = 0 + 0$. Et s'il appartient à un seul des deux ensembles, par exemple A , il appartiendra à l'union mais pas à l'intersection, et on aura cette fois-ci $1 + 0 = 1 + 0$, ce qui est toujours vrai. L'égalité est donc bien vérifiée.
4. On peut simplement écrire $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$, ce qui se démontre sans problème : si $x \in A$, alors $f_A(x) = 1$ et $f_{\bar{A}} = 0 = 1 - 1$, et si $x \notin A$, on a cette fois-ci $f_{\bar{A}}(x) = 1 = 1 - 0$.
5. Puisque $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, on peut écrire $f_{A \setminus B} = f_A \times (1 - f_B) = f_A - f_A f_B$. Ensuite, en utilisant la première forme de la différence symétrique et le fait que $A \setminus B$ et $B \setminus A$ ont une intersection vide, on trouve alors $f_{A \Delta B} = f_{A \setminus B} + f_{B \setminus A} = f_A + f_B - 2f_A f_B$. Si on préfère passer par l'autre forme de la différence symétrique, $f_{A \Delta B} = f_{A \cup B}(1 - f_{A \cap B}) = (f_A + f_B - f_A f_B)(1 - f_A f_B) = f_A + f_B - f_A f_B - f_A^2 f_B - f_A f_B^2 + f_A^2 f_B^2$. Comme $f_A^2 = f_A$ et $f_B^2 = f_B$ (élever au carré des 1 ou des 0 ne change rien), on retrouve la même formule.
6. Un sous-ensemble étant caractérisé par sa fonction indicatrice, il suffit de prouver que les fonctions indicatrices sont les mêmes. En effet, $f_{A \Delta (B \Delta C)} = f_A + f_{B \Delta C} - 2f_A f_{B \Delta C} = f_A + f_B + f_C - 2f_B f_C - 2f_A(f_B + f_C - 2f_B f_C) = f_A + f_B + f_C - 2(f_A f_B + f_A f_C + f_B f_C) + 4f_A f_B f_C$. L'expression obtenue étant invariante par permutation des ensembles A , B et C (si on remplace A par C et C par A , rien ne change), elle est égale à celle qu'on trouvera pour $f_{(A \Delta B) \Delta C}$, ce qui prouve l'associativité.

Exercice 17 (*)

Il faut vérifier les trois propriétés caractéristiques :

- $x + x$ est toujours un entier pair, donc la relation est réflexive.
- si $x + y$ est pair, $y + x$ aussi, donc la relation est symétrique.
- si $x + y$ et $y + z$ sont pairs, alors leur somme $x + 2y + z$ aussi, et $2y$ étant pair, $x + z$ le sera également, donc la relation est transitive.

La relation est bien une relation d'équivalence. Comme toutes les sommes de deux entiers pairs ou de deux entiers impairs sont paires, il n'y en fait que deux classes d'équivalence : l'une est constituée de tous les entiers pairs, l'autre de tous les entiers impairs.

Exercice 18 (*)

Là encore, on vérifie les trois propriétés :

- $x^2 - x^2 = x - x = 0$, donc la relation est réflexive.
- si $x^2 - y^2 = x - y$ alors $y^2 - x^2 = y - x$ (il suffit de changer les signes des deux côtés), donc la relation est symétrique.
- si $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$, alors en additionnant les deux équations, $x^2 - z^2 = x - z$, ce qui prouve la transitivité.

La relation est donc une relation d'équivalence. Une fois x fixé, l'équation $x^2 - y^2 = x - y$ peut s'écrire $(x - y)(x + y) = x - y$, ce qui se produit si $x - y = 0$ ou $x + y = 1$, c'est-à-dire si $y = x$ (normal) ou bien $y = 1 - x$. Il y a un cas particulier, celui du réel $x = \frac{1}{2}$ qui est tout seul dans sa classe d'équivalence. Toutes les autres classes d'équivalence sont constituées de deux éléments, par exemple la classe de 0 est $\{0, 1\}$, ou la classe de 5 est $\{5, -4\}$.

Exercice 19 (*)

Pour compter le nombre de diviseurs, le plus simple est de commencer par écrire la décomposition en facteurs premiers du nombre : $10! = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Un diviseur de $10!$ sera nécessairement de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, avec $a \in \{0; 1; \dots; 8\}$, $b \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $c \in \{0; 1; 2\}$ et $d \in \{0; 1\}$. Chaque quadruplet d'entiers (a, b, c, d) donne un diviseur différent (par unicité de la décomposition en facteurs premiers), ce qui fait $9 \times 5 \times 3 \times 2 = 270$ diviseurs au total. Si on compte aussi les diviseurs négatifs, il y en a deux fois plus, soit 540. Par exemple, pour $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = 0$, on trouve le diviseur $32 \times 3 \times 25 = 2\,400$.

Exercice 20 (**)

- Une astuce est d'écrire $xy - 2x - 3y = 0$, soit $(x - 3)(y - 2) = 6$. Comme il n'existe pas trente-six mille façons d'écrire 6 comme produit de deux entiers, on peut faire une liste des possibilités pour $x - 3$ et $y - 2$. Soit $x - 3 = 6$ et $y - 2 = 1$, ce qui donne la solution $(9, 3)$; soit $x - 3 = 3$ et $y - 2 = 2$, ce qui donne $(6, 4)$; soit $x - 3 = 2$ et $y - 2 = 3$, ce qui donne $(5, 5)$; soit $x - 3 = 1$ et $y - 2 = 6$, ce qui donne $(4, 8)$. Et n'oublions pas, bien entendu, les diviseurs négatifs : $x - 3 = -6$ et $y - 2 = -1$ donne $(-3, 1)$; $x - 3 = -3$ et $y - 2 = -2$ donne $(0, 0)$; $x - 3 = -2$ et $y - 2 = -3$ donne $(1, -1)$; et enfin $x - 3 = -1$ et $x - 2 = -6$ donne $(2, -4)$. Finalement, $\mathcal{S} = \{(-3, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -4), (4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)\}$.
- Il s'agit ici de mettre sous forme canonique : $(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 5 = 0$, soit $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$. Pour écrire 10 comme somme de deux carrés, il faut nécessairement écrire $10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$ (si on dépasse 3 on sera largement au-dessus de 10, et pour 2 rien ne marche). Cela laisse encore une fois huit possibilités : par exemple si $x - 1 = 1$ et $y + 2 = 3$, on trouve la solution $(2, 1)$. Je vous passe les détails, on obtient $\mathcal{S} = \{(4, -1); (4, -3); (2, 1); (2, -5); (0, 1); (0, -5); (-2, -1); (-2, -3)\}$.
- Même technique que ci-dessus, $x^2 - \left(3y - \frac{39}{6}\right)^2 + \frac{169}{4} = 40$, soit en factorisant $\left(x - 3y + \frac{13}{2}\right)\left(x + 3y - \frac{13}{2}\right) = -\frac{9}{4}$. Quitte à tout multiplier par 4, on trouve donc l'équation $(6y - 2x - 13)(2x + 6y - 13) = 9$. Il y a six possibilités pour écrire 9 comme un produit de deux entiers, qui vont donner à chaque fois un système à résoudre. D'abord $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = 9 \\ 2x + 6y - 13 = 1 \end{cases}$. En additionnant les deux équations, $12y - 26 = 10$, soit $12y = 36$ et $y = 3$, ce qui donne $2x = 14 - 6y = -4$, donc $x = -2$. Passons au deuxième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = 3 \\ 2x + 6y - 13 = 3 \end{cases}$. La somme des deux équations donne $12y - 26 = 6$, soit $y = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$, solution qui ne nous intéresse pas. troisième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = 1 \\ 2x + 6y - 13 = 9 \end{cases}$. On somme comme d'habitude : $12y - 26 = 10$, on retrouve $y = 3$, mais cette fois-ci $2x = 22 - 6y = 4$, donc $x = 2$. Quatrième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = -9 \\ 2x + 6y - 13 = -1 \end{cases}$. On additionne : $12y - 26 = -10$, soit $y = \frac{4}{3}$, solution à éliminer ici. On trouvera la même valeur pour y avec -1 et -9 au lieu de -9 et -1 . Reste donc le cinquième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = -3 \\ 2x + 6y - 13 = -3 \end{cases}$. On trouve $12y - 26 = -6$, soit $y = \frac{5}{3}$. Là encore, pas de solution entière en vue. Finalement, il n'y a que deux couples solutions : $\mathcal{S} = \{(2, 3); (-2, 3)\}$.
- Pas vraiment de méthode très subtile ici, il suffit de trouver toutes les possibilités en faisant augmenter la valeur de x puis celle de y . Si $x = 1$, on a déjà $\frac{1}{x} = 1$, donc on ne peut pas trouver de valeurs de y et de z convenables (en supposant les entiers naturels). Si $x = 2$, on doit avoir $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Il faut donc avoir au moins $y = 3$ pour que l'égalité puisse être vérifiée. Si $y = 3$, $z = 6$ convient puisque $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Si $y = 4$, on peut prendre $z = 4$. Si $y > 4$, on va trouver des valeurs éventuelles de z plus petites que y , donc des couples déjà obtenus (à l'ordre près). Passons donc à $x = 3$, si on ne veut pas retomber sur des solutions déjà trouvées, il faudra prendre $y \geq 3$ et $z \geq 3$, mais alors la seule possibilité est $x = y = z = 3$. Finalement, les seuls triplets possibles sont

$(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$ ainsi que leurs permutations. Si on accepte les entiers relatifs dans les solutions, on trouve plus de possibilité puisque tous les triplets $(1, n, -n)$ seront solution (et leurs permutations, bien entendu). Par ailleurs, $\left| \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right| < \frac{1}{2}$ si n et p sont de signe opposés et (en valeur absolue) supérieurs ou égaux à 2. Il est donc impossible de trouver des solutions en entiers relatifs avec trois entiers tous différents de 1.

Exercice 21 (***)

1. Une récurrence simple suffit ici : $F_2 F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$, donc P_1 est vraie. Supposons P_n vraie, alors $F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+1} (F_n - F_{n+1}) + F_n^2$. Or, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donc $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$, donc l'expression devient $F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} - F_{n-1}^2 = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. On a bien prouvé la propriété au rang $n + 1$.
2. Dans le cas où n est pair, l'égalité précédente est une identité de Bezout $a F_{n+1} + b F_n = 1$, avec $a = F_{n-1}$ et $b = -F_n$ qui sont des coefficients entiers, donc F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux. Si n est impair, il suffit de changer les signes pour aboutir à la même conclusion.
3. On va cette fois-ci effectuer une récurrence double sur l'entier p , n étant fixé. Pour $p = 1$, $F_n F_0 + F_{n+1} F_1 = F_{n+1}$, donc la propriété est vraie au rang 1. Si $p = 2$, $F_n F_1 + F_{n+1} F_2 = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, donc la propriété est également vraie au rang 2. Supposons l'égalité valable aux rangs p et $p + 1$, alors $F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p} = F_n F_p + F_{n+1} F_{p+1} + F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p = F_n (F_p + F_{p-1}) + F_{n+1} (F_{p+1} + F_p) = F_n F_{p+1} + F_{n+1} F_{p+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $p + 2$ et achève la récurrence.
Un diviseur commun à F_n et F_p sera donc diviseur de F_{n+p} , et par conséquent diviseur commun à F_n et F_{n+p} . De façon similaire, un diviseur commun à F_n et F_{n+p} sera diviseur de $F_{n+1} F_p$, et F_n et F_{n+1} étant premiers entre eux, le diviseur de F_n divisera nécessairement F_p , et sera par conséquent diviseur commun de F_n et F_p . Les diviseurs communs des deux couples sont donc identiques.
4. D'après la question précédente, $F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n-m} = F_n \wedge F_{n-km}$ pour tout entier k (quitte à appliquer plusieurs fois de suite la relation). En appliquant successivement toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd aux entiers n et m , les couples (a, b) obtenus à toutes les étapes vérifieront donc $F_n \wedge F_m = F_a \wedge F_b$. Puisque le dernier couple obtenu sera $(n \wedge m, 1)$, on a donc $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m} \wedge F_1 = F_{n \wedge m}$.
5. En effet, par contraposée, si n n'est pas premier, on peut choisir un diviseur m de n non trivial, et on a alors $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m} = F_m$. En particulier, F_n est divisible par F_m et c'est certainement un diviseur distinct de 1 et de F_n . En fait, l'énoncé est pire qu'imprécis, il est carrément faux puisqu'il existe des entiers n premiers pour lesquels F_n n'est pas premier. Calculons donc : $F_3 = 2$ est premier, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ est premier, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ est premier, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$ est premier, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$ est premier, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1597$ qui est premier, $F_{18} = 2584$, $F_{19} = 4181$. Et là, hop, au moment où plus personne n'y croit, $4181 = 37 \times 113$ alors que 19 est premier !

Exercice 22 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci paraît relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geq 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\frac{n}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow n = p$, et $-\frac{n+1}{2} = -\frac{p+1}{2} \Rightarrow n = p$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geq 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p - 1$ est un antécédent de p . Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble

$\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0; 0)$, puis $f(1) = (0; 1)$ et $f(2) = (1; 0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0; 2)$, $f(4) = (1; 1)$ et $f(5) = (2; 0)$ etc. Le couple $(p; q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p + q$, il est même le $(p + 1)$ ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \dots + (p + q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\frac{(p + q)(p + q + 1)}{2}$ éléments.

Autrement dit, on a $f(n) = (p; q)$ pour $n = \frac{(p + q)(p + q + 1)}{2} + p$ (on commence à numéroté à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p + 1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).

- En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1; 1)$ mais pas au couple $(2; 2)$, ni à $(3; 3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après le théorème de Cantor-Bernstein démontré à l'exercice suivant.
- Pour le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f , qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0, \dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale!), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2 , comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2 , x_3 , et de tous les x_i . Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f (il n'apparaît nulle part dans notre liste numérotée), qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
- On a vu à l'exercice 7 une bijection th de $\mathbb{R}$ dans $] - 1; 1[$. Il suffit de poser $g(x) = \frac{1 + f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
- Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP) . Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).

Exercice 23 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

- Procédons par l'absurde et supposons qu'un élément y (on est dans l'ensemble Y) appartienne à la fois à A_i et à A_j , pour des valeurs distinctes de i et de j (par exemple $i < j$). Si $i = 0$, $y \in Y \setminus f(X)$, donc $y \notin f(X)$. Or, si ce même y appartient à $A_j = \varphi(A_{j-1})$ (puisque $j > 0$), on a donc $y \in f \circ g(A_{j-1})$, qui est certainement inclus dans $f(X)$. Ce n'est pas possible. Le cas général est similaire : on a d'un côté $y \in A_i$, donc $y = \varphi^i(\alpha)$, avec $\alpha \in A_0$ (par construction des ensembles A_i), et d'autre part $y = \varphi^j(\beta)$, avec $\beta \in A_0$ également. Mais alors $\varphi^i(\varphi^{j-i}(\beta)) = y = \varphi^i(\alpha)$. Or, l'application φ est injective (c'est la composée de deux injections) donc φ^i aussi. On peut alors affirmer que $\alpha = \varphi^{j-i}(\beta)$, ou si l'on préfère que $\alpha \in A_0 \cap A_{j-i}$. D'après ce qui précède, c'est impossible. Les ensembles sont donc tous disjoints.
- Soit $y \in A$, il existe donc un entier n pour lequel $y \in A_n$, alors $\varphi(y) \in A_{n+1} \subset A$, donc $\varphi(A) \subset A$.
- Comme $f(B) = \varphi(A)$, $f(B) \subset A$ d'après ce qui précède. Par ailleurs, $g(A_i) \subset B$, donc $\varphi(A_i) \subset f(B)$, soit $A_{i+1} \subset B$. Cela signifie que tous les ensembles A_i à l'exception de A_0 sont inclus dans

$f(B)$, qui contient donc $A \setminus A_0$. Reste à prouver qu'un élément de A_0 ne peut pas appartenir à $f(B)$. C'est en fait évident puisque dans le cas contraire il serait dans $f(X)$. On a bien $f(B) = 1 \setminus A_0$.

Par construction, tout élément de B est image d'un élément de A par g , la fin de la question modifiée est donc triviale (l'unicité découlant de l'injectivité de g).

4. L'application h est bien définie. Sa restriction à B est injective par construction (si $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$, alors $x = x'$ en appliquant g). Sa restriction à C est également injective puisqu'elle coïncide avec f . Reste à vérifier qu'un élément x de B et un élément x' de C ne peuvent pas avoir la même image par h . En effet, $h(x) = g^{-1}(x) \in A$ d'après la question précédente, et $h(x') = f(x') \notin A$ puisque A est le complémentaire de $f(X)$ dans Y . L'application h est donc injective. Elle est également surjective : tout élément y de A admet un antécédent dans B (il s'agit de $g(y)$), et tout élément y' dans $Y \setminus A$ appartient par définition à $f(X)$ donc admet un antécédent x par f dans X . Cet antécédent ne peut appartenir à B puisque $f(B) \subset A$, il appartient donc à C et constitue un antécédent de y' par h . Finalement, l'application h est bijective de X dans Y .