

# Feuilles d'exercices n° 4 : Ensembles

PTSI B Lycée Eiffel

13 octobre 2020

## Exercice 1 (\*\*\*)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1.  $\forall n \geq 4, 2^n \leq n!$
2.  $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$ .
3.  $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. Le nombre de diagonales dans un polygône à  $n$  côtés est  $\frac{n(n-3)}{2}$ .
5. La dérivée  $n$ -ème de la fonction  $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$  est donnée par  $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$ .

## Exercice 2 (\*\*)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$ . Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de  $u_n$ , puis la prouver par récurrence.

## Exercice 3 (\*\*)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$ . Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$ .

## Exercice 4 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = u_1 = 0, u_2 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ . Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de  $u_n$ , puis la prouver par récurrence.

## Exercice 5 (\*)

Exprimer à l'aide du symbole  $\Sigma$  les expressions suivantes :

1.  $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$
2.  $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1\ 024}$
3.  $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$
4.  $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$

## Exercice 6 (\*\* à \*\*\*)

Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{aligned} & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (2k+1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} & \bullet \sum_{k=18}^{k=2020} 3 & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} \\ & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1) & \bullet \sum_{k=1}^{k=945} \frac{1}{3^k} & \bullet \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

## Exercice 7 (\*\*)

Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\forall k \geq 2$ ,  $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$ . En déduire la valeur de  $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$ .

## Exercice 8 (\*\*)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la somme des carrés d'entiers.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$ .
2. En développant  $(k+1)^3$ , exprimer  $\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^3$  à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de  $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$ .

## Exercice 9 (\*\*\*)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$\bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad \bullet \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \quad \bullet \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \quad \bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i-j| \quad \bullet \sum_{1 \leq i, j \leq n} i2^j$$

## Exercice 10 (\*\*)

Calculer les produits suivants :

$$\bullet \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \bullet \prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \bullet \prod_{k=1}^{k=n} (6k-3)$$

## Exercice 11 (\*\*\*)

Le but de cet exercice est de calculer la somme  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$  de trois façons différentes.

1. Écrire  $S_n$  sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer  $S_n$  en développant  $(2k+1)^3$ .
3. On pose  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$  et  $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$ . Expliquer pourquoi  $U_n = S_n + T_n$  (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer  $T_n$  et  $U_n$ .
5. Retrouver la valeur de  $S_n$  à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que  $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ .

## Exercice 12 (\*\*\*)

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un même ensemble  $E$ , on appelle différence symétrique de  $A$  et  $B$  l'ensemble noté  $A\Delta B$  et défini par  $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

1. Montrer qu'on a également  $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
2. Montrer que la différence symétrique est associative, c'est-à-dire que  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ .
3. Montrer que, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois sous-ensembles de  $E$ , alors  $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$ .
4. Montrer que, l'ensemble  $A$  étant fixé, il existe un unique ensemble  $B$  tel que  $A\Delta B = \emptyset$ .

5. Montrer de même qu'il existe un unique  $B$  tel que  $A\Delta B = E$ .
6. Plus généralement, montrer que, quel que soit le sous-ensemble  $X$  de  $E$ , il existe un unique  $B$  tel que  $A\Delta B = X$  (en termes plus savant, l'application  $B \mapsto A\Delta B$  est une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  dans lui-même).

### Exercice 13 (\*\*)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  :

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$  si  $n$  est pair, et  $f_3(n) = n - 1$  si  $n$  est impair
- $f_4(n) = \text{Ent}\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

### Exercice 14 (\*)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ  $E$  et leur ensemble d'arrivée  $F$ , déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ,  $E = F = \mathbb{R}$ .
2.  $g(x) = x^3 + x - 2$ ,  $E = F = \mathbb{R}$ .
3.  $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ,  $E = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ ,  $F = \mathbb{R}_+$ .
4.  $i(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$ ,  $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $F = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

### Exercice 15 (\*\*\*)

Soit  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f \circ f \circ f = f$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

### Exercice 16 (\*\*)

Dans cet exercice, on note, pour un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{N}$ ,  $f_A$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ .

1. En prenant pour cette question l'ensemble  $A$  de tous les entiers naturels pairs, la fonction  $f_A$  est-elle injective ? Surjective ?
2. Quels sont les sous-ensembles  $A$  pour lesquels  $f_A$  n'est pas surjective ?
3. Démontrer que, quels que soient les ensembles  $A$  et  $B$ ,  $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$  et  $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$ .
4. Exprimer  $f_{\bar{A}}$  en fonction de  $f_A$  (et démontrer la formule, bien entendu).
5. Dédire des deux questions précédentes une expression de  $f_{A \setminus B}$ , puis de  $f_{A \Delta B}$ .
6. Redémontrer beaucoup plus facilement que dans l'exercice 12 que la différence symétrique est associative, c'est-à-dire que  $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ .

### Exercice 17 (\*)

On considère sur  $\mathbb{Z}$  la relation définie de la façon suivante :  $xRy$  si et seulement si  $x + y$  est pair. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

### Exercice 18 (\*)

On définit sur  $\mathbb{R}$  une relation  $R$  par  $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ . Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence d'un réel  $x$ . Combien comporte-t-elle d'éléments ?

## Exercice 19 (\*)

Déterminer le nombre de diviseurs de  $10!$  (sans les écrire tous).

## Exercice 20 (\*\*)

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations suivantes :

1.  $xy = 2x + 3y$ .
2.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ .
3.  $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$ .
4.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .

## Exercice 21 (\*\*\*)

On considère la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

1. Montrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .
2. Montrer que  $F_n$  et  $F_{n+1}$  sont premiers entre eux.
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$ . En déduire que le pgcd de  $F_n$  et de  $F_p$  est le même que celui de  $F_n$  et  $F_{n+p}$ .
4. Montrer que,  $\forall (n, m) \geq 2$ ,  $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$ .
5. Montrer que, si  $n \geq 5$  et  $F_n$  est premier, alors  $n$  est premier. La réciproque est-elle vraie ?

## Exercice 22 (\*\* à \*\*\*\*\*)

Un ensemble  $E$  est dit **dénombrable** s'il existe une application  $f : E \rightarrow \mathbb{N}$  bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini  $E$  pour lequel il existe une application injective de  $E$  dans  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que  $\mathbb{Z}$  est dénombrable.
3. Montrer que  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.
4. Montrer que  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.
5. Montrer que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de \*\*\*\*\*)
6. Montrer qu'il existe une bijection de  $]0; 1[$  dans  $\mathbb{R}$ .
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

## Exercice 23 : théorème de Cantor-Bernstein (\*\*\*\*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles tels qu'il existe deux applications  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de  $X$  sur  $Y$ . Pour cela, on note  $\varphi = f \circ g$ . On définit les sous-ensembles  $A_i$  de  $Y$  par récurrence de la façon suivante :  $A_0 = Y \setminus f(X)$ ,  $A_1 = \varphi(A_0)$  et, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $A_{i+1} = \varphi(A_i)$ . On pose enfin  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .

1. Montrer que les ensembles  $A_i$  sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble  $A$  est stable par  $\varphi$  (c'est-à-dire que  $\varphi(A) \subset A$ ).
3. On pose  $B = g(A)$ , et  $C = X \setminus B$ . Montrer que  $f(B) = A \setminus A_0$ , et que tout élément de  $B$  possède un unique antécédent par  $g$  dans  $Y$ . On notera cet antécédent  $g^{-1}(x)$ . Montrer que  $g^{-1}(x) \in A$ .
4. On définit l'application  $h : X \rightarrow Y$  en posant  $h(x) = g^{-1}(x)$  si  $x \in B$ , et  $h(x) = f(x)$  si  $x \in C$ . Montrer que  $h$  est une bijection de  $X$  sur  $Y$ .