Programme de colle n^{o} 26

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 14/06 au 18/06 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 19 : Matrices et algèbre linéaire.

- Matrice d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension E dans une base de E.
- Matrice d'une application linéaire f entre espaces vectoriels de dimension finie dans une base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ et dans une base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée. Cette matrice sera notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, ou plus simplement $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ dans le cas d'un endomorphisme. On pourra utiliser la notation *can* pour désigner la base canonique d'un espace usuel.
- Opérations basiques sur les matrices d'application linéaire : formule $Y = MX$ quand Y représente le vecteur-colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{C}$, et X le vecteur-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$; NM est la matrice représentative de $g \circ f$ dans des bases cohérentes avec celles de la définition de M et de N, application à la caractérisation des symétries, des projecteurs et à la bijectivité d'une application linéaire.
- Formules de changements de bases :
  - définition de la matrice de passage entre deux bases d'un même espace vectoriel, inversibilité des matrices de passage
  - formule $X' = P^{-1}X$ pour le calcul des coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base
  - formule $M' = Q^{-1}MP$ pour le changement de bases pour la matrice d'un endomorphisme. En pratique, on n'utilisera pratiquement que le cas particulier $M' = P^{-1}MP$ pour les endomorphismes
- Déterminants :
  - Déterminant de deux vecteurs dans le plan, de trois vecteurs dans l'espace, définition géométrique, interprétation en terme de calcul d'aire ou de volume, formule à l'aide des coordonnées (règle de Sarrus dans $\mathbb{R}^3$), propriétés théoriques (bi- ou trilinéarité, alternance, antisymétrie)
  - Déterminant de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$: définition comme unique application multilinéaire alternée valant 1 sur la base canonique (rien de démontré, bien entendu)
  - Déterminant d'une matrice carrée, inversibilité de M ssi $\det(M) \neq 0$, propriétés élémentaires ($\det({}^tM) = \det(M)$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N)$), effet des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes sur le calcul du déterminant, développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

— déterminant d'une application linéaire, invariance du déterminant par changement de base

Chapitre 20 : Séries numériques.

- Définitions et vocabulaire : terme général d'une série, série convergente, somme d'une série, série à termes positifs.
- Critères de convergence :
  — si la série $\sum u_n$ converge alors (u_n) tend vers 0 (on distribuera des fouets aux colleurs en début de colle au cas où un élève tenterait d'appliquer la réciproque de ce résultat)
  — critère d'équivalence du terme général pour les séries à termes positifs
  — comparaison série-intégrale (théoriquement hors-programme puisque la notion d'intégrale impropre n'a pas été vue, mais on peut quand même le faire appliquer sur des cas simples)
- Exemples de calculs de sommes de séries télescopiques.
- Séries de référence :
  — série géométrique et géométrique dérivée de raison q (critère de convergence, formule pour la somme)
  — série exponentielle
  — divergence de la série harmonique et équivalence de la somme partielle avec $\ln(n)$
  — critère de Riemann de convergence des séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$