Programme de colle n^o 16

PTSI B Lycée Eiffel

semaine du 01/03 au 05/03 2021

La colle débutera par une question de cours portant sur l'énonciation d'un théorème, de définitions, ou la rédaction de l'une des démonstrations indiquées **en gras** dans le présent programme de colles. Tout élève ne sachant pas répondre correctement à cette question de cours se soumettra aux conséquences désagréables de sa paresse, lesdites conséquences étant laissées à la libre appréciation du colleur (mais les châtiments corporels étant hélas interdits, cela se limitera en général à une note en-dessous de la moyenne).

Chapitre 11 : Dérivation, suites récurrentes.

- Dérivation, vocabulaire et formulaire :
  - taux d'accroissement $\tau_{a,f}$ d'une fonction f en a, interprétation graphique comme pente de la droite reliant les points de la courbe d'abscisses a et $a+h$, définition de $f'(a)$ comme limite du taux d'accroissement, fonction dérivable en a et dérivable sur un intervalle I
  - dérivée à gauche ou à droite en a (notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$), demi-tangentes à la courbe quand les deux valeurs sont distinctes, existence de tangentes verticales en cas de limite infinie du taux d'accroissement
  - équation de la tangente en a à la courbe représentative de f, devéloppement limité à l'ordre 1 de f en a (écrit sous la forme $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$)
  - démonstration des diverses formules de dérivation (**somme**, **produit**, **inverse**, **quotient**, composée, réciproque)
  - dérivées successives d'une fonction, notation $f^{(n)}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle, formule de Leibniz pour la dérivée n-ème d'un produit
- Théorèmes faisant intervenir la dérivation :
  - si f est dérivable sur $[a,b]$ et admet un extremum en $x \in]a,b[$, alors $f'(x) = 0$
  - théorème de Rolle
  - théorème des accroissements finis (sa **démonstration** à l'aide du théorème de Rolle est à connaître)
  - application du TAF à l'étude des variations
  - théorème de prolongement de la dérivée (si f est dérivale sur $]a,b]$, continue en a et f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$)
  - inégalité des accroissements finis (deux versions, une avec une hypothèse du type $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ sur un intervalle I, une autre où on a une hypothèse de majoration de $|f'|$)
- Étude de suites récurrentes :
  - vocabulaire de base (suite récurrente, intervalle stable par une fonction f, point fixe d'une fonction)
  - la limite éventuelle d'une suite récurrente est un point fixe de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

- utilisation de l'IAF pour démontrer la convergence et éventuellement obtenir des informations sur la vitesse de convergence d'une suite récurrente (u_n) (aucune connaissance spécifique n'est exigée mais les élèves doivent connaître le fonctionnement global, et notamment savoir quand faire des récurrences)

- Extension des définitions vues dans les chapitres 10 et 11 aux suites et fonctions complexes :
  - limite d'une suite complexe, la suite (z_n) converge si et seulement si les suites réelles $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent
  - limites de fonctions complexes (ici, fonction complexe désigne une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$), continuité et dérivation de fonctions complexes
  - aucun exercice spécifique n'a été fait sur ce sujet, on se ramènera de toute façon systématiquement à l'étude de suites ou de fonctions réelles

Chapitre 12 : Polynômes

- Vocabulaire : coefficient dominant, degré d'un polynôme, polynôme unitaire, notations $\mathbb{K}[X]$ (en pratique, on se contentera de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la définition de corps n'ayant bien sûr pas été vue) et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations de base sur $\mathbb{K}[X]$: somme, produit, composée.
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$:
  - notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, théorème de division euclidienne
  - racines d'un polynôme, **a est racine de P si et seulement si P est divisible par $X - a$**, conséquences (nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, principe d'identification des coefficients)
  - multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide du polynôme dérivé, vocabulaire supplémentaire (polynôme scindé, polynôme scindé à racines simples)
  - polynômes irréductibles, théorème de d'Alembert-Gauss, théorème de factorisation en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$
- **PAS** de relations coefficients-racines cette semaine

Prévisions pour la semaine suivante : polynômes (avec en plus les relations coefficients-racines et la formule de Taylor). Le chapitre suivant sera consacré à l'intégration (fonctions en escalier, suites d'intégrales) mais ne sera probablement au programme de colles que dans deux semaines.