

TD n° 9 : révisions pour le DS 8

PTSI Lycée Eiffel

21 mai 2021

Exercice 1

1. L'événement A_2 est réalisé si on tire Pile aux deux premiers lancers, donc $P(A_2) = \frac{1}{4}$. L'événement A_3 sera réalisé si on tire Pile aux deuxième et troisième tirage, mais pas au premier (sinon le premier double Pile serait atteint au deuxième tirage et pas au troisième), seul le tirage FPP convient donc, et $P(A_3) = \frac{1}{8}$. De même, B_2 est réalisé si on tire PF aux deux premiers tirages donc $P(B_2) = \frac{1}{4}$; et B_3 est réalisé si on tire PPF ou FPP aux trois premiers tirages, donc $P(B_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
2. L'événement $A_2 \cap B_3$ est réalisé si et seulement si les trois premiers tirages donnent PPF , donc $P(A_2 \cap B_3) = \frac{1}{8}$. On en déduit (en revenant à la définition des probabilités conditionnelles) que $P_{B_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ (ce qui est tout à fait logique : sur les deux suites de lancers réalisant B_3 , une seule a réalisé A_2 auparavant).
3. (a) On veut donc que le premier tirage ait donné Pile, mais qu'il faille attendre le k -ème tirage pour voir apparaître le premier PF . Autrement dit, tous les Piles précèdent le tirage $k - 1$ doivent être suivis par des Piles. Comme on commence par un Pile, il est facile de voir (on fait une petite récurrence si on veut rendre ça rigoureux) qu'on ne peut alors obtenir que des Piles aux $k - 1$ premiers tirages, et enfin un Face au k -ème tirage.
(b) Supposons donc F_1 réalisé, ce Face obtenu au premier lancer ne peut certainement pas contribuer à produire la première succession PF . Si on continue les lancers jusqu'à obtenir le premier PF , tout se passe donc comme si le premier lancer n'avait pas eu lieu (mais on aura naturellement lancé une fois de plus que si ce premier lancer n'avait vraiment pas eu lieu). Autrement dit, $P_{F_1}(B_k) = P(B_{k-1})$ (on ne regarde que les $k - 1$ derniers lancers), et on en déduit que $P(F_1 \cap B_k) = P(F_1) \times P_{F_1}(B_k) = \frac{1}{2}P(B_{k-1})$.
(c) Les événements P_1 et F_1 formant un système complet d'événements (c'est évident), on peut appliquer la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité recherchée : $P(B_k) = P(P_1 \cap B_k) + P(F_1 \cap B_k)$ (on prend la version de la formule ne faisant pas intervenir les probabilités conditionnelles ici). Le deuxième terme de la somme a été calculé à la question précédente, et le premier, comme on l'a vu juste avant, correspond à la probabilité de la suite de lancer $PP \dots PF$ ($k - 1$ Piles suivis d'un Face), soit $\frac{1}{2^k}$. On obtient donc bien $P(B_k) = \frac{1}{2}P(B_{k-1}) + \frac{1}{2^k}$.
(d) Posons donc $u_k = 2^k P(B_k)$, alors d'après la question précédente, $u_k = 2^{k-1}P(B_{k-1}) + 1 = u_{k-1} + 1$. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 1. Comme on a par exemple $u_2 = 4 \times P(B_2) = 1$, on en déduit que $u_k = 1 + (k - 2) = k - 1$ quel que soit l'entier $k \geq 2$ (attention quand même au fait que la condition initiale porte sur le terme

numéro 2). Il ne reste plus qu'à conclure : $P(B_k) = \frac{1}{2^k} u_k = \frac{k-1}{2^k}$. Comme on n'est jamais trop prudent, on vérifie que ça donne la bonne valeur lorsque $k = 3$: $P(B_3) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$, c'est correct.

4. (a) C'est évident : les trois événements sont deux à deux disjoints, et leur union recouvre bien l'ensemble des possibilités puisque $(P_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2) = P_1$.
- (b) Appliquons donc brillamment la formule des probabilités totales avec le système précédent : $P(A_k) = P(F_1 \cap A_k) + P(P_1 \cap P_2 \cap A_k) + P(P_1 \cap F_2 \cap A_k)$. Le deuxième terme de cette somme est trivialement nul (si on a obtenu deux Piles aux deux premiers lancers, on aura du mal à obtenir pour la première fois une succession de deux Piles aux lancers $k-1$ et k si on a supposé $k \geq 4$). Les deux autres se calculent exactement comme à la question 3.b : si l'événement F_1 est réalisé, on peut l'oublier, et la probabilité d'obtenir nos deux premiers Piles successifs aux lancers $k-1$ et k vaut alors $P(A_{k-1})$ (on a éliminé un lancer). De même, si $P_1 \cap F_2$ est réalisé, c'est comme si on repartait à zéro, et la probabilité d'obtenir nos deux premiers Piles successifs aux lancers $k-1$ et k vaudra cette fois $P(A_{k-2})$ (on a supprimé deux lancers). On obtient alors sans problème (en multipliant bien sûr ces probabilités conditionnelles par $P(F_1)$ et $P(P_1 \cap F_2)$) la formule demandée $P(A_k) = \frac{1}{2}P(A_{k-1}) + \frac{1}{4}P(A_{k-2})$.
- (c) Vérifions donc : $\frac{1}{2}P(A_1) + \frac{1}{4}P(A_0) = \frac{1}{4}$, c'est bien la valeur obtenue pour $P(A_2)$; et $\frac{1}{2}P(A_2) + \frac{1}{4}P(A_1) = \frac{1}{8}$, qui est là aussi la valeur correcte pour $P(A_3)$.
- (d) En posant $v_k = P(A_k)$, la suite (v_k) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, qui est équivalente à $4x^2 - 2x - 1 = 0$. Cette équation admet pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et pour racines $x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. On en déduit que la suite (v_k) a une expression de la forme $v_k = Ax_1^k + Bx_2^k$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On peut bien sûr utiliser les valeurs données par l'énoncé pour $P(A_0)$ et $P(A_1)$ en guise de conditions initiales, ce qui donne les deux équations $A + B = 1$ et $Ax_1 + Bx_2 = 0$. Autrement dit, $B = 1 - A$, et $Ax_1 + x_2 - Ax_2 = 0$, soit $A = \frac{x_2}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \times \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$; et $B = 1 - A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $P(A_k) = \frac{1}{2\sqrt{5} \times 4^k} ((\sqrt{5} - 1) \times (1 + \sqrt{5})^k + (\sqrt{5} + 1) \times (1 - \sqrt{5})^k)$.

Exercice 2

1. (a) On tirera la première boule noire au plus tard à l'avant-dernier tirage, donc $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, N-1\}$.
- (b) On dispose donc initialement de deux boules noires et deux blanches dans l'urne. On a bien sûr $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, puis $P(X = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (il faut d'abord tirer une boule blanche, puis tirer une boule noire dans une urne qui ne contient plus que deux boules noires et une boule blanche). Enfin, soit on passe au complémentaire, soit on calcule directement $P(X = 3) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (on tire deux boules blanches aux deux premiers tirages, et on est sûr de tirer une boule noire au troisième puisqu'il ne reste que des boules noires dans l'urne). Résumons tout cela dans un superbe tableau :

k	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Aucune loi usuelle en vue, on calcule l'espérance à la main (ce qui ne va pas beaucoup nous fatiguer avec trois valeurs) : $E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{5}{3}$. On va ensuite appliquer comme toujours la formule de König-Huygens pour le calcul de variance, et donc commencer par calculer $E(X^2) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = \frac{10}{3}$. On en déduit $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$.

- (c) On va bien sûr procéder de façon similaire à la question précédente. On a cette fois-ci initialement trois boules blanches et deux boules noires dans l'urne. On calcule successivement $P(X = 1) = \frac{2}{5}$, puis $P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ (on tire une boule blanche, puis une noire dans une urne contenant deux blanches et deux noires) et de même $P(X = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$. Enfin, on aura $P(X = 4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$. Allez, un petit tableau ne peut pas faire de mal :

k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Là encore on calcule tout à la main : $E(X) = \frac{2}{5} + \frac{6}{10} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} = 2$ (chouette, une valeur simple !), puis $E(X^2) = \frac{2}{5} + \frac{12}{10} + \frac{9}{5} + \frac{16}{10} = 5$ (encore une valeur triviale !), et enfin, toujours grâce à la formule de König-Huygens, $V(X) = 5 - 4 = 1$.

- (d) Le calcul n'est pas plus difficile que dans les cas particuliers traités ci-dessus : $P(X = 1) = \frac{2}{N}$ puisqu'il y a deux boules noires dans l'urne, qui contient par ailleurs N boules au total.

Et si on doit tirer une boule blanche puis une boule noire, $P(X = 2) = \frac{N-2}{N} \times \frac{2}{N-1} = \frac{2(N-2)}{N(N-1)}$.

- (e) Remarquons déjà que la formule fonctionne lorsque $k = 1$ (un facteur $N - 1$ se simplifie alors entre le numérateur et le dénominateur) et $k = 1$. Plus généralement, pour réaliser l'événement $X = k$, il faut tirer des boules blanches aux $k - 1$ premiers tirages, puis une noire au k -ème tirage, soit $P(X = k) = \frac{N-2}{N} \times \frac{N-3}{N-1} \times \cdots \times \frac{N-k}{N-k+2} \times \frac{2}{N-k+1}$ (il faut simplement faire attention aux dénominateurs des deux derniers termes, il reste $N - k + 1$ boules dans l'urne quand on effectue le tirage numéro k , puisqu'on a déjà tiré $k - 1$ boules). Le facteur du 2 du dernier numérateur ne se simplifie pas, ainsi que le dernier facteur $N - k$ qui le précède. Au dénominateur, les deux premiers facteurs N et $N - 1$ restent, ce qui donne bien $P(X = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$. Pour le plaisir (ce n'était pas demandé dans l'énoncé), vérifions que la somme de ces probabilités est bien égale

$$\text{à } 1 : \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2(N-k)}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} N-k = \frac{2}{N(N-1)} \left((N-1)N - \frac{(N-1)N}{2} \right) = \frac{2}{N(N-1)} \times \frac{(N-1)N}{2} = 1. \text{ Tout va bien.}$$

- (f) Il s'agit cette fois de calculer $E(X) = \sum_{k=1}^{N-1} k \times P(X = k) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} kN - k^2 = \frac{2}{N(N-1)} \left(\frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} \right) = N - \frac{2N-1}{3} = \frac{N+1}{3}$. Cette valeur est cohérente avec les deux cas particuliers traités plus haut. On peut pipoter que cette

valeur est plus ou moins logique si on se convainc intuitivement qu'avec deux boules noires dans l'urne, on devrait tirer la première boule noire « à peu près au tiers » des tirages, et la deuxième « à peu près aux deux tiers ». Mais il semble bien difficile de faire un raisonnement plus rigoureux.

2. (a) L'expérience va s'arrêter naturellement dès qu'on tire une boule noire (puisqu'on sera alors certain d'avoir tiré dans l'urne U_2), ce qui peut se produire à n'importe quel tirage. Naturellement, si on tire dans l'urne U_1 , on ne le saura pas avant le dernier tirage (puisqu'il est toujours possible que la dernière boule restant dans l'urne soit noire et qu'on ait donc choisi initialement l'urne U_2), et on aura dans ce cas nécessairement $Y = N$. Les valeurs prises sont $Y(\Omega) = \{1, \dots, N\}$.
- (b) Pour que Y prenne une valeur différente de N , il faut déjà choisir l'urne U_2 (une chance sur deux), puis tirer la boule noire au tirage numéro k . Une fois choisie l'urne U_2 , le rang de tirage de la boule noire suit une loi uniforme sur l'ensemble de ses valeurs possibles $\{1, 2, \dots, N\}$ (si ça ne vous semble pas évident, rien n'empêche de recalculer toutes les probabilités, mais ce n'est vraiment pas nécessaire, on peut considérer qu'on va continuer les tirages jusqu'au bout même après avoir tiré la boule noire et dans ce cas, toutes les positions possibles de la boule noire sont équiprobables). On a donc $P_{U_2}(Y = k) = \frac{1}{N}$ (en notant U_2 l'événement « on effectue les tirages dans l'urne U_2 ») et, si $k \neq N$, $P(Y = k) = P(U_2) \times P_{U_2}(Y = k) = \frac{1}{2N}$. Naturellement, on aura par contre $P(Y = N) = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}$ puisqu'il faut ajouter la probabilité de tirer dans l'urne U_1 (on peut écrire une formule des probabilités totales si on veut vraiment être ultra rigoureux).
- (c) On calcule donc $E(Y) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{2N} + \frac{N}{2N} + \frac{N}{2} = \frac{N(N-1)}{4N} + \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{4} + \frac{N+1}{2} = \frac{3N+1}{4}$. Ce résultat est relativement logique : on a une chance sur deux d'avoir de toute façon $Y = N$, et une chance sur deux que Y soit réparti uniformément entre 1 et N , donc avec une moyenne légèrement supérieure à $\frac{N}{2}$, ce qui donne globalement une moyenne un peu au-dessus de $\frac{3N}{4}$.
3. (a) Les seules possibilités sont celles où on a tiré deux boules noires lors des quatre premiers tirages (on peut évidemment arrêter l'expérience quand on tire la deuxième boule noire, on est alors sûr d'avoir tiré dans l'urne U_3). Tant qu'on tire des boules blanches, on est bien sûr obligés de continuer puisqu'on ne sait pas si on a tiré dans U_1 ou U_2 (ou même U_3 tant qu'on n'a pas atteint le quatrième tirage). Si on a tiré une seule boule noire, on a encore la possibilité (jusqu'au dernier tirage) d'avoir tiré dans U_2 ou U_3 .
- (b) On déduit du raisonnement de la question précédente que $Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$ (on ne peut évidemment pas tirer deux boules noires avant le deuxième tirage). De plus, $P(Z = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}$ (il faut choisir l'urne U_3 puis tirer dedans les deux boules noires lors des deux premiers tirages). Le calcul est un peu plus compliqué ensuite : pour $Z = 3$, il faut choisir U_3 , puis tirer lors des trois premiers tirages soit noire, blanche, noire, soit blanche, noire, noire, ce qui donne $P(Z = 3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{15}$. On constate que les deux tirages convenables sont en fait équiprobables. Pour le calcul de $P(Z = 4)$ (qui nécessite à nouveau de tirer dans l'urne U_3), on a maintenant trois possibilités (noire, blanche, blanche, noire ; blanche, noire, blanche, noire ou blanche, blanche, noire, noire) qui seront à nouveau équiprobables, et on calcule donc $P(Z = 4) = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$. Enfin, on va cette fois-ci calculer la dernière probabilité en passant au complémentaire : $P(Z = 5) = 1 - \frac{1}{30} - \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Résumons tout dans un petit tableau :

k	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance : $E(X) = \frac{2}{30} + \frac{3}{15} + \frac{4}{10} + \frac{20}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + 4 = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. Sans grande surprise, cette espérance est proche de 5, il y a très peu de chances qu'on sache dans quelle urne on a tiré avant de tirer la dernière boule.

Exercice 3

1. C'est immédiat : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Comme toujours, je vais calculer l'inverse à l'aide d'une résolution de système :

$$\begin{cases} 3x - y + z = a \\ 2x + 2z = b \\ x - y + 3z = c \end{cases}$$
 L'opération $L_1 - L_3$ donne $2x - 2z = a - c$, on peut ensuite l'additionner et la soustraire à L_2 pour trouver $4x = a + b - c$ et $4z = b + c - a$, soit $x = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{4}c$ et $z = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$. On en déduit ensuite, par exemple à l'aide de la première équation du système initial, $y = 3x + z - a = -\frac{1}{2}a + b - \frac{1}{2}c$. Il est temps de conclure : la matrice A est bien inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Puisque sa matrice représentative dans la base canonique est inversible, l'application f est bijective, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. Pour obtenir une relation de la forme $A^2 = aA + bI$, les coefficients en-dehors de la diagonale imposent $a = 4$. Ensuite, on déduit de la diagonale $b = -4$. Autrement dit, $A^2 = 4A - 4I$.
4. On peut réécrire l'égalité précédente sous la forme $A(4I - A) = 4I$, ou encore $A\left(I - \frac{1}{4}A\right) = I$. De façon équivalente, on aura $f \circ \left(id - \frac{1}{4}f\right) = id$, donc $f^{-1} = id - \frac{1}{4}f$. Pour la vérification, contentons-nous de le faire sur la matrice : $I - \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On retrouve bien l'expression déjà obtenue pour A^{-1} .
5. Déterminer le noyau de $f - 2id$ revient à résoudre le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Les trois équations sont manifestement équivalentes, et se ramènent simplement à $y = x + z$. On a donc $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. En particulier, $\dim(\ker(f - 2id)) = 2$ (la famille génératrice obtenue étant une base puisque ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires).
6. Il y a bien sûr plein de méthodes possibles, mais pour exploiter les choses étudiées dans notre dernier chapitre, écrivons la matrice de la famille en question dans la base canonique (matrice qui sera donc exactement la matrice de passage P demandée deux questions plus loin) :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour montrer que la famille est une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre (trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3). Supposons $a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = 0$, on obtient les relations $a + b = a + b + c = a + c = 0$, dont on déduit très rapidement $a = b = c = 0$. La famille est bien une base.

7. Si on note $v = (1, 1, 0)$, et $w = (0, 1, 1)$, on a par définition $f(v) = 2v$ et $f(w) = 2w$ puisque ces deux vecteurs appartiennent à $\ker(f - 2id)$. Reste à calculer l'image de u et à l'exprimer en fonction de u, v et w : $f(1, 1, 1) = (3, 4, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) + 2(1, 1, 1)$, soit $f(u) = v + w + 2u$ (si on n'arrive pas à trouver cette décomposition à vue d'oeil, on peut bien entendu résoudre un petit système. En gardant les trois vecteurs dans l'ordre (v, w, u) , la matrice de f dans la

base $\mathcal{B}$ est donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. La matrice demandée est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour l'inverser, résolvons le système

$$\begin{cases} x & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{cases}.$$

En soustrayant la première puis la troisième ligne à la deuxième, on obtient immédiatement $y = b - a$ et $x = b - c$, dont on déduit que $z = c - y = a - b + c$.

Bref, l'inverse de la matrice P est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. On calcule sans difficulté $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient exactement la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4

1. Il suffit d'écrire les coefficients dans le bon ordre : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. En observant les coefficients hors de la diagonale, on constate qu'ils ont été multipliés par 3 par rapport à ceux de la matrice A . Comme $3A$ a pour coefficients diagonaux 6, 0 et 6, on en déduit facilement que $A^2 = 3A - 2I$. L'application f vérifie donc $f^2 = 3f - 2id$, soit $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{3}{2}id\right) = -id$. On en déduit que f est bijective, de réciproque $f^{-1} = \frac{3}{2}id - \frac{1}{2}f$.

3. Pour obtenir le noyau $\ker(f - id)$, on doit résoudre l'équation $f(u) = u$, soit $\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & x \\ x & & & + & z & = & y \\ x & - & y & + & 2z & = & z \end{cases}$.

Les trois équations sont identiques, on a simplement $y = x + z$, soit $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Même méthode pour le deuxième noyau, mais cette fois on doit résoudre $f(u) = 2u$, soit

$$\begin{cases} 2x & - & y & + & z & = & 2x \\ x & & & + & z & = & 2y \\ x & - & y & + & 2z & = & 2z \end{cases}.$$

et $y = x$, puis en remplaçant celle du milieu est toujours vérifiée. On a donc simplement $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

4. Il suffit pour cela de prouver que la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc qu'elle est libre. Supposons donc $a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = 0$, on obtient les relations $a + b = a + b + c = a + c = 0$, dont on déduit très rapidement $a = b = c = 0$. La famille est bien une base.
 5. (a) En soustrayant les deux relations imposées, on a nécessairement $p = f - id$, et donc $q = id - p = 2id - f$.
 - (b) On calcule donc $p \circ p = (f - id)^2 = f^2 - 2f + id$. Comme $f^2 = 3f - 2id$, on a donc $p^2 = f - id = p$, ce qui prouve que p est bien un projecteur. Même pas besoin de faire le calcul similaire pour q : quand p est un projecteur, $id - p$ aussi (on inverse juste le rôle des deux sous-espaces caractéristiques de la projection). Enfin, $p \circ q = (f - id) \circ (2id - f) = -f^2 + 3f - 2id = 0$, et de même pour $q \circ p$.
 6. C'est une récurrence facile : au rang $n = 0$, on calcule $2^0 p + q = p + q = id = f^0$, et en supposant la propriété vraie au rang n , alors $f^{n+1} = f \circ f^n = (2p + q) \circ (2^n p + q) = 2^{n+1} p + q$ en utilisant les différents résultats de compositions démontrés à la question précédente. Pour $n = -1$, on devrait donc avoir $f^{-1} = \frac{1}{2}p + q = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}id + 2id - f = \frac{3}{2}id - \frac{1}{2}f$. C'est bien ce qu'on avait trouvé au début de l'exercice.
- Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?