

TD n° 8 : corrigé

PTSI Lycée Eiffel

18 mars 2021

Exercice 1

- Plusieurs possibilités ici, mais le plus normal est de chercher les racines (complexes) du polynôme P , soit les racines quatrièmes de -4 . En posant $z = re^{i\theta}$, on a $z^4 = -4$ si $r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$. Par identification du module et de l'argument, on obtient donc $r^4 = 4$, soit $r = \sqrt{2}$, et $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$. Les quatre racines recherchées sont donc $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$, et leurs conjugués $z_3 = -1 - i$ et $z_4 = 1 - i$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme unitaire P se factorise sous la forme $P = (X - 1 - i)(X - 1 + i)(X + 1 - i)(X + 1 + i)$. Pour retrouver la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les facteurs conjugués, en constatant pour gagner du temps que les parties réelles des racines sont égales à ± 1 et le carré de leurs modules à 2, ce qui donne $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.
- La racine évidente est -1 : $(-1)^6 + 4(-1)^5 + 4(-1)^4 - 4(-1)^3 - 11(-1)^2 - 8(-1) - 2 = 1 - 4 + 4 + 4 - 11 + 8 - 2 = 0$. Testons la multiplicité de -1 en calculant les dérivées du polynôme Q : $Q' = 6X^5 + 20X^4 + 16X^3 - 12X^2 - 22X - 8$, dont -1 est encore racine : $-6 + 20 - 16 - 12 + 22 - 8 = 0$. On continue : $Q'' = 30X^4 + 80X^3 + 48X^2 - 24X - 22$, et -1 est encore racine : $30 - 80 + 48 + 24 - 22 = 0$. Bon ben on continue alors : $Q''' = 120X^3 + 240X^2 + 96X - 24$, et, incroyable mais vrai, -1 est toujours racine : $-120 + 240 - 96 - 24 = 0$. On ne va pas s'arrêter en si bon chemin : $Q^{(4)} = 360X^2 + 480X + 96$, et là ça ne marche plus : $360 - 480 + 96 = -24$. On a tout de même une racine quatrième, et on peut factoriser Q sous la forme $Q = (X + 1)^4 R$, avec R de degré 2. Plutôt que de faire une division euclidienne lourdingue, notons a et b les deux racines (éventuellement complexes) du polynôme R , les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines de Q , donc $-4 + a + b$, est égale à -4 , donc $a + b = 0$; et que le produit des racines, donc ab (puisque $(-1)^4 = 1$), est égal à -2 . On a donc $b = -a$ et $-a^2 = -2$, soit $a = \pm\sqrt{2}$, et $Q = (X + 1)^4(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ (factorisation identique dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ puisque toutes les racines sont réelles).
- Le polynôme P a pour racine évidente -1 quelle soit la valeur de la constante α : $P(-1) = -1 + \alpha - \alpha + 1 = 0$. On peut donc le factoriser sous la forme $P = (X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a + b)X^2 + (b + c)X + c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a = 1$, puis $a + b = \alpha$, donc $b = \alpha - 1$, $b + c = \alpha$, donc $c = 1$, ce qui est cohérent avec la dernière identification. Intéressons-nous maintenant au polynôme du second degré $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$, qui admet pour discriminant $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4 = (\alpha - 3)(\alpha + 1)$ (on factorise directement la différence de deux carrés). On peut alors distinguer plusieurs cas :

- si $\alpha \in]-1, 3[$, $\Delta < 0$ et les deux dernières racines de P sont complexes, ses trois racines étant alors -1 , $\frac{-\alpha - i\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{\Delta}}{2}$.
- si $\alpha < -3$ ou $\alpha > 1$, le polynôme P admet trois racines réelles distinctes égales à -1 , $\frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$.
- si $\alpha = -1$, le polynôme admet bien sûr toujours pour racine -1 , et une racine double égale à 1 .
- enfin, si $\alpha = 3$, la racine -1 est en fait triple, ce qui ne surprendra personne puisque dans ce cas on a en effet $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X + 1)^3$.

Exercice 2

1. C'est un calcul de primitive de fonction puissance qui devrait être immédiat, on pose par exemple $F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$, et cette fonction a bien pour dérivée $\sqrt{1-x}$ (attention à ne pas oublier le signe $-$ issu de la « primitivation du $1-x$ sous la racine carrée). On en déduit que $u_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ (on doit bien entendu trouver une valeur positive pour cette intégrale).
2. Il s'agit donc de calculer $u_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$ en posant $t = \sqrt{1-x}$. Autrement dit, $t^2 = 1-x$, donc $x = 1-t^2$. On en déduit que $dx = -2t dt$, et les bornes de l'intégrale vont devenir $t = 1$ et $t = 0$ (attention, elles seront dans le mauvais sens). On a donc $u_1 = \int_1^0 t(1-t^2) \times (-2t) dt = \int_0^1 2t^2 - 2t^4 dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.
3. On part donc de $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, et on effectue une IPP en posant $u(x) = x^n$, donc $u'(x) = nx^{n-1}$; et $v'(x) = \sqrt{1-x}$ qu'on peut intégrer en $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ (cf question 1). On en déduit que $u_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2n}{3}x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x} dx = 0 + \frac{2n}{3} \left(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x} dx\right)$ en développant simplement le facteur $1-x$ dans l'intégrale de droite. Bref, on obtient ce qui est demandé : $u_n = \frac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)$.
Autrement dit, $u_n \left(1 + \frac{2n}{3}\right) = \frac{2n}{3}u_{n-1}$, soit $\frac{2n+3}{3}u_n = \frac{2n}{3}u_{n-1}$ et donc $u_n = \frac{2n}{2n+3}u_{n-1}$. Vérifions que ça fonctionne pour $n = 1$: $u_1 = \frac{2}{5}u_0 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, c'est bon ! On applique la même formule pour $n = 2$ et on trouve $u_2 = \frac{4}{7}u_1 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$. Passionnant.
4. Comme toujours, deux méthodes possibles. On peut calculer simplement $u_{n+1} - u_n$ et déterminer son signe, ou bien se contenter de signaler que, $\forall x \in [0, 1]$, $x^{n+1} \leq$

x^n , donc $x^{n+1}\sqrt{1-x} \leq x^n\sqrt{1-x}$ (on multiplie par une quantité positive). Il ne reste plus qu'à intégrer entre 0 et 1 pour en déduire que $u_{n+1} \leq u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante (pour les plus paresseux, on peut même prouver directement la décroissance de la suite à partir de la relation de récurrence de la question précédente).

Comme on a par ailleurs $u_n \geq 0$ (on intègre une fonction manifestement positive pour le calcul de u_n), la suite est décroissante et minorée, donc converge. On se doute bien que sa limite sera nulle, on peut le prouver rapidement en signalant simplement que, $\forall x \in [0, 1]$, $\sqrt{1-x} \leq 1$, donc $x^n\sqrt{1-x} \leq x^n$, et en intégrant

cette inégalité (entre 0 et 1, bien entendu), $u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

On a donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et le théorème des gendarmes nous permet alors d'affirmer que $\lim u_n = 0$.

5. (a) Les termes de la suite (v_n) n'étant jamais nuls, on peut calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n} =$

$$\frac{(2n+5)! \times u_{n+1}}{(n+1)!(n+2)!} \times \frac{n!(n+1)!}{(2n+3)! \times u_n} = \frac{(2n+5)(2n+4)u_{n+1}}{(n+2)(n+1)u_n}.$$

Or, on sait que $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$ (il suffit d'appliquer la formule de la question 3 en rempla-

çant les n par des $n+1$), donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+5)(2n+4)(2n+2)}{(n+2)(n+1)(2n+5)} = 4$. Ceci

prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

- (b) Comme par ailleurs $v_0 = \frac{3!u_0}{0!1!} = 6u_0 = 4$, on en déduit que $v_n = 4^{n+1}$, puis

$$\text{que } u_n = \frac{4^{n+1} \times n!(n+1)!}{(2n+3)!}. \text{ Par exemple, } u_2 = \frac{4^3 \times 2!3!}{7!} = \frac{128}{4 \times 5 \times 6 \times 7} =$$

$$\frac{16}{5 \times 3 \times 7} = \frac{16}{105}, \text{ on retrouve la bonne valeur.}$$

Exercice 3

- On a donc $P_0 = 1$ et $L_0 = P_0 = 1$; puis $P_1 = X^2 - 1$ et $L_1 = P_1' = 2X$; $P_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = P_2'' = 12X^2 - 4$; et enfin $P_3 = (X^2 - 1)^3 = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1$ et $L_3 = P_3^{(3)} = 120X^3 - 72X$.
- Le polynôme P_n est par définition de degré $2n$ et de terme dominant X^{2n} (si on développe brutalement à coup de binôme de Newton, le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)^n$ vaut en effet X^{2n}). En dérivant n fois, on retombera donc sur un polynôme de degré n (même lorsque $n = 0$ ça marche) et de terme dominant $(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!}x^n$, le coefficient dominant de L_n vaut donc $\frac{(2n)!}{n!}$ (ce qu'on peut vérifier pour $n \leq 3$ à l'aide des calculs de la première question).
- Question assez stupide, P_n est pair comme puissance d'un polynôme pair. En fait c'est plus intéressant pour L_n : comme la dérivée change la parité du polynôme (dériver un polynôme pair donne un polynôme impair et vice versa), dériver n fois va donner un polynôme impair pour L_n si n est impair, et pair si n est pair (ce qui est cohérent avec les calculs de la première question).

4. Posons donc $f(x) = (x-1)^n$ et $g(x) = (x+1)^n$. Par récurrence essentiellement triviale (on a déjà vu ces calculs dans des exercices), on prouve que, pour tout entier $k \leq n$, on a $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$, et $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$ (par exemple pour f : c'est vrai au rang 0 car $\frac{n!}{(n-0)!}(x-1)^{n-0} = (x-1)^n = f(x)$, et si on suppose la formule vraie au rang k , en dérivant une fois de plus, on aura $f^{(k+1)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \times (n-k)x^{n-k-1} = \frac{n!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}$, soit exactement la formule souhaitée au rang $n+1$). Comme $P_n = (X^2-1)^n = (X+1)^n(X-1)^n = f \times g$, on peut appliquer la formule de Leibniz à la dérivée n -ème pour en déduire que $L_n = P_n^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k$. Si on évalue cette somme lorsque $X = 1$, le seul terme de la forme $(X-1)^{n-k}$ qui ne s'annule pas est celui obtenu lorsque $k = n$, et on a donc $L_n(1) = 1 \times n! \times 1 \times 1 \times 2^n = 2^n n!$. Même raisonnement pour -1 , mais cette fois c'est le terme obtenu lorsque $k = 0$ qui ne s'annule pas et qui donne $L_n(-1) = n! \times (-2)^n = (-1)^n 2^n n!$ (on pouvait aussi exploiter la parité de L_n pour déduire la valeur de $L_n(-1)$ de celle de $L_n(1)$).
5. Par définition, $P_{n+1} = (X^2-1)^{n+1}$, donc en dérivant simplement, $P'_{n+1} = (n+1)2X(X^2-1)^n = 2(n+1)XP_n$.
6. Si on dérive à nouveau la relation précédente, on a $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 2(n+1)XP'_n$. Or, en décalant la relation précédente, on sait que $P'_n = 2nXP_{n-1}$, donc $P''_{n+1} = 2(n+1)P_n + 4(n^2+n)X^2P_{n-1}$, ce qu'on peut encore écrire $P''_{n+1} = (2n+2)P_n + (4n^2+4n)(X^2-1)P_{n-1} + (4n^2+4n)P_{n-1} = (4n^2+6n+2)P_n + (4n^2+4n)P_{n-1}$, en se débarrassant ainsi de l'indéterminée X dans la relation de récurrence.
7. Si on dérive n la première relation obtenue $P'_{n+1} = 2(n+1)XP_n$, on peut appliquer la formule de Leibniz au produit de X (qui a bien entendu des dérivées nulles dès le rang 2) et de P_n pour obtenir $P_{n+1}^{(n+1)} = 2(n+1)XP_n^{(n)} + 2(n+1)nP_n^{(n-1)}$, soit $L_{n+1} = (2n+2)XL_n + (2n^2+2n)P_n^{(n-1)}$ (relation numérotée 1 pour la suite). On peut également dériver $n-1$ la relation obtenue à la question précédente $P''_{n+1} = (4n^2+6n+2)P_n + (4n^2+4n)P_{n-1}$ pour trouver $L_{n+1} = (4n^2+6n+2)P_n^{(n-1)} + (4n^2+4n)L_{n-1}$ (relation numérotée 2). Multiplions maintenant la relation 1 par $2n+1$ avant de lui soustraire la relation 2 multipliée par n , histoire d'éliminer les termes en $P_n^{(n-1)}$, et on trouve $(2n+1)L_{n+1} - nL_{n+1} = (4n^2+6n+2)XL_n - (4n^3+4n^2)L_{n-1}$, soit en simplifiant tout par le facteur commun $n+1$: $L_{n+1} = 2(2n+1)XL_n - 4n^2L_{n-1}$, formule qui permet de calculer aisément les polynômes L_n par récurrence.

Exercice 4

1. On calcule bien sûr directement $I_0 = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$.

Ensuite, on va avoir besoin d'une IPP pour calculer $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x dx$. On

pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = 2 - x$ pour obtenir $v'(x) = -1$. On a donc $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 + \int_0^1 e^x dx = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$.

Enfin, pour I_2 , on procède de même : $I_2 = \frac{1}{2} \int_0^2 (2-x)^2 e^x dx$. On pose $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = (2-x)^2$ pour obtenir $v'(x) = -2(2-x)$. On a donc $I_1 = \frac{1}{2} [(2-x)^2 e^x]_0^2 + \int_0^1 (2-x)e^x dx = -2 + I_1 = e^2 - 5$.

2. On l'obtient par la même IPP que précédemment, en posant toujours $u'(x) = u(x) = e^x$, et $v(x) = \frac{(2-x)^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $v'(x) = -\frac{(2-x)^n}{n!}$ (on peut simplifier un facteur $n+1$). On trouve alors $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} [(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 + I_n$, soit $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. Lorsque $x \in [0, 2]$, on peut écrire que $0 \leq (2-x) \leq 2$, donc $0 \leq (2-x)^n \leq 2^n$, et $0 \leq I_n \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^x dx = \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$. Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$, donc le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. Au rang 0, on a $\frac{2^0}{0!} + I_0 = 1 + e^2 - 1 = e^2$ donc la propriété est vraie. Supposons-là vérifiée au rang n , alors $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} + I_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = e^2$ par hypothèse de récurrence. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n .

5. Puisque I_n tend vers 0, il suffit de passer à la limite dans la relation précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} = e^2$.