TD n^{o} 5 : révisions pour le DS4

PTSI B Lycée Eiffel

10 décembre 2020

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4-2i)z + 11 - 10i = 0$.
2. On note A et B les deux points du plan complexe ayant pour affixes les solutions obtenues à la question précédente. Déterminer les deux points (distincts) C et D pour lesquels les triangles ABC et ABD sont isocèles rectangles (en C et D respectivement). Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$? Faire une figure.
3. En notant M le point d'affixe z, déterminer plus généralement tous les nombres complexes z pour lesquels le triangle ABM est un triangle rectangle en M. On représentera géométriquement l'ensemble obtenu.
4. Où se situe le centre du cercle obtenu à la question précédente par rapport aux points A et B ? Que représente le rayon de ce même cercle ? Pourquoi ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul fixé pour tout l'exercice. On note $a = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Écrire a sous forme algébrique lorsque $n = 3$, $n = 4$ puis $n = 6$.
2. Dans le cas où $n = 4$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a^k$ et vérifier que cette somme est égale à $\dfrac{2}{1-a}$.
3. Pour tout le reste de l'exercice, n est à nouveau un entier naturel non nul quelconque. On pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$, montrer que $A = \dfrac{2}{1-a}$.
4. En exploitant le résultat de la question précédente, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Expliquer pourquoi la première somme calculée à la question précédente était en fait égale à 1 de façon « évidente ».
6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a^{2k} - 1|^2$. Interpréter géométriquement la somme calculée (en faisant intervenir des distances). On illustrera en particulier les résultats obtenus lorsque $n = 4$ (où on refera le calcul plus directement) et lorsque $n = 6$ (sans refaire de calcul).

Exercice 3

Au bridge, on répartit entre quatre joueurs les 52 cartes d'un jeu de cartes usuel. Chaque joueur reçoit donc une **main** constituée de 13 cartes choisies au hasard parmi les 52 constituant le jeu. On ne cherchera bien sûr pas à faire les applications numériques dans cet exercice (pour information, la réponse à la première question est 635 013 559 600).

1. Combien de mains différentes un joueur donné peut-il recevoir ?
2. Combien de ces mains contiennent les quatre As ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement deux As ?
4. Combien de ces mains contiennent exactement une carte de chaque valeur possible (un As, un Roi, etc, un 3, un 2) ?
5. Combien de ces mains contiennent exactement cinq **honneurs** (un honneur au bridge est une carte « supérieure ou égale » au 10, donc un 10, un Valet, une Dame, un Roi ou un As) ?
6. Combien de ces mains contiennent exactement deux As **et** exactement cinq piques ?
7. Combien de ces mains pour lesquelles les cartes sont réparties 4333 dans les quatre couleurs, c'est-à-dire qu'on a tiré par exemple quatre piques, trois coeurs, trois carreaux et trois trèfles (mais la couleur de quatre cartes n'est pas forcément pique) ?
8. Combien de ces mains pour lesquelles les cartes sont réparties 5332 entre les différentes couleurs (là encore, la couleur de cinq cartes n'est pas connue, tout comme celle de deux cartes) ?
9. Dans le jargon du bridge, on parle de **chicane** pour désigner une couleur où on ne possède aucune carte.
   (a) Combien de mains y a-t-il pour lesquelles le joueur possède exactement deux chicanes (autrement dit, toutes ses cartes sont réparties dans les deux couleurs restantes) ?
   (b) Rappeler l'énoncé de la formule du crible de Poincaré dans le cas d'une union de quatre ensembles.
   (c) Calculer le nombre de mains possibles pour lesquelles le joueur possède au moins une chicane.