TD n° 3 : révisions pour le DS2.

PTSI B Lycée Eiffel

8 octobre 2020

Exercice 1

Les divers calculs de ce premier exercice sont indépendants.

1. Résoudre l'équation $\cos(4x) + \cos(9x) + \cos(14x) = 0$.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$.
3. Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
4. Calculer la valeur de $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.
5. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)$ (on doit trouver une fraction simple comme résultat).

Exercice 2

On définit dans cet exercice une fonction g par $g(x) = (x-1)^2 e^{-x}$, ainsi qu'une famille de fonctions f_k définies par $f_k(x) = x + k(x^2+1)e^{-x}$ (où k est un réel quelconque). On notera $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.

1. (a) Étudier les variations de la fonction g, et dresser son tableau de variations complet (limites incluses).
   (b) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction g (on précise que $e^3 \simeq 20$).
   (c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$ en distinguant des cas suivant la valeur du réel a (on fera un effort particulier de rigueur dans la rédaction pour cette question).
2. Expliquer pourquoi les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une asymptote commune en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f'_k de la fonction f_k et déterminer en fonction de k le nombre de points où $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale (cette question devrait avoir un rapport avec la question 1.c).
4. On note Γ la courbe constituée de tous les points où l'une des courbes $\mathcal{C}_k$ admet une tangente horizontale. Montrer que la courbe Γ est incluse dans la courbe représentative d'une fonction h définie par une équation de la forme $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des fonctions polynômiales. Cette question est complètement indépendante des dernières questions de l'exercice.
5. Que peut-on dire des tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 1, lorsque k parcourt $\mathbb{R}$?
6. (a) On note T_k la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en son point d'abscisse 2. Déterminer une équation de la droite T_k.
   (b) Montrer que les droites T_k sont coucourantes en un point M dont on précisera les coordonnées.

Exercice 3

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = 1 + \sin(2x) + 2\cos(x)$.

1. Déterminer un intervalle d'étude le plus retreint possible pour la fonction f.
2. Calculer les images par la fonction f des réels suivants : $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$.
3. Déterminer les antécédents par f du réel 1.
4. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle choisi à la première question.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f (on représentera au moins une période complète).
6. Déterminer un intervalle I le plus large possible sur lequel f effectue une bijection, et préciser vers quel intervalle s'effectue cette bijection.
7. Donner une allure rapide de la courbe représentative de la réciproque de la bijection évoquée à la question précédente (on y indiquera en particulier les éventuelles tangentes verticales).

Exercice 4

Nous allons présenter dans ce dernier exercice quelques résultats complémentaires sur la fonction arctangente. La plupart des questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Simplifier l'expression de $\cos(\arctan(x))$ et de $\sin(\arctan(x))$ pour tout réel x.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. Dériver la fonction $f : x \mapsto x\arctan(x)$. En déduire une primitive de la fonction arctan, puis la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(t)\ dt$ (on ne cherchera surtout pas à simplifier l'expression obtenue).
4. Soit a un réel strictement positif, on pose $f_a(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.
   (a) Préciser le domaine de définition de f_a, et prouver que, partout où elle est définie, sa dérivée vérifie $f_a'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   (b) Déduire de la question précédente que, si deux réels positifs a et b sont tels que $ab < 1$, alors $\arctan(a)+\arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. Cette dernière relation sera notée (A) pour la suite de l'exercice.
   (c) Quelle relation peut-on obtenir dans le cas où $ab > 1$? Cette deuxième relation sera notée (B) pour la suite de l'exercice.
5. Redémontrer la relation (A) évoquée à la question précedente par un calcul direct, en la composant par la fonction tangente (on fera attention à être bien rigoureux).
6. Calculer en exploitant la relation (A) (même si vous n'avez pas réussi à la démontrer) la valeur de l'expression $2\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{13}\right)$.
7. Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ (on pourra exploiter la relation (B) évoquée plus haut).