TD n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 septembre 2020

Exercice 1

- Commençons par chercher les valeurs d'annulation du dénominateur pour déterminer le domaine de définition de la fonction f. Le trinôme x^2-x-3 a pour discriminant $\Delta = 1+12 = 13$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \simeq 2.3$, et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \simeq -1.3$. On en déduit évidemment que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\}$.

  Les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ se calculent de façon classique, en exploitant le « théorème des termes de plus haut degré » ou en faisant une factorisation des termes prépondérants au numérateur et au dénominateur de la fraction : $f(x) = \dfrac{x(1+\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x}^2}$, forme sous laquelle ne subsiste plus de forme indéterminée puisque le quotient de droite tend vers 1. On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

  Le calcul des autres limites de f nécessite essentiellement d'étudier son signe, ce qui se fait bien à l'aide d'un tableau de signes :

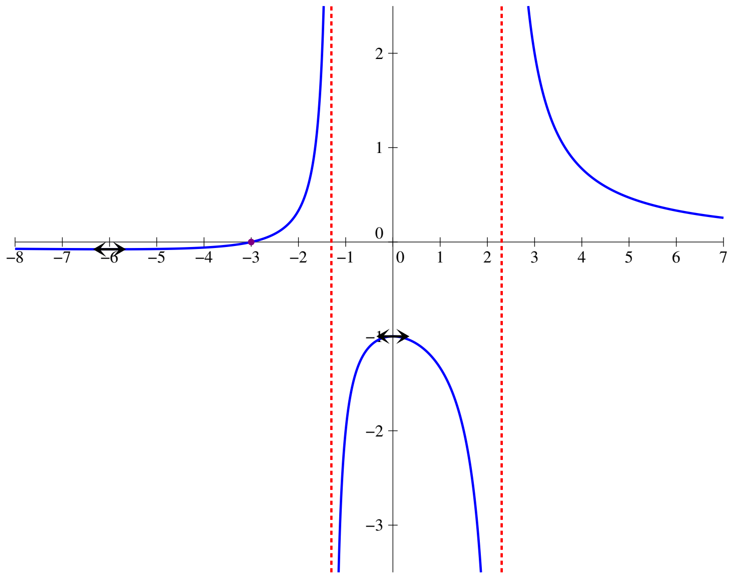
x		-3		x_1		x_2	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-x-3	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$

  On peut maintenant par exemple calculer $\lim\limits_{x\to x_1^-} x^2-x-3 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) = +\infty$ (le numérateur ayant une limite finie strictement positive quand x tend vers x_1).

  Il ne reste plus qu'à étudier les variations de la fonction. Elle est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition, de dérivée $f'(x) = \dfrac{x^2-x-3-(2x-1)(x+3)}{(x^2-x-3)^2} = \dfrac{-x^2-6x}{(x^2-x-3)^2} = \dfrac{-x(x+6)}{(x^2-x-3)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui s'annule en $x=0$ et $x=-6$ et qui sera positif uniquement entre ces deux valeurs. Profitons-en pour calculer $f(0) = \dfrac{3}{-3} = -1$ et $f(-6) = \dfrac{-3}{39} = -\dfrac{1}{13}$ afin de compléter le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		-6		-3		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\frac{1}{13}$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

On termine enfin notre étude en traçant une allure de la courbe représentative de f, en prenant bien soin d'indiquer les différentes asymptotes, ainsi que les tangentes horizontales aux points d'annulation de la dérivée :



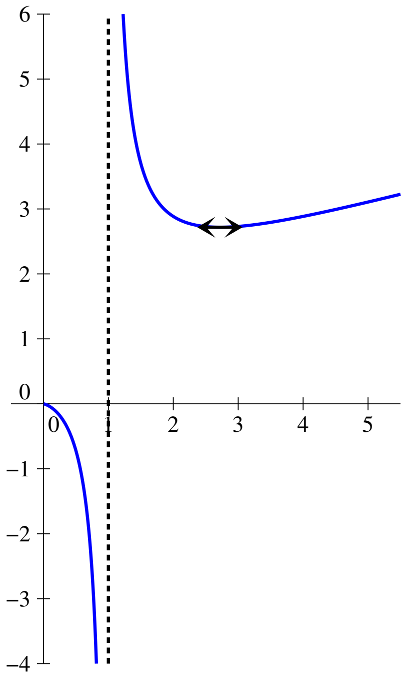
$f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-3}$

- La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}\backslash\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$. Elle y est dérivable, de dérivée $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$, dont le signe est celui de $\ln(x)-1$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,e[$, et strictement croissante sur $]e,+\infty[$.

  On a besoin de connaître les résultats de croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Pas de forme indéterminée en 0, par contre, où on a directement $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Enfin, les dernières limites ne posent aucun problème : $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$ (le dénominateur est négatif à gauche de 1) et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$. En calculant $g(e) = e$, on complète le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

On conclut bien sûr avec une allure de courbe :

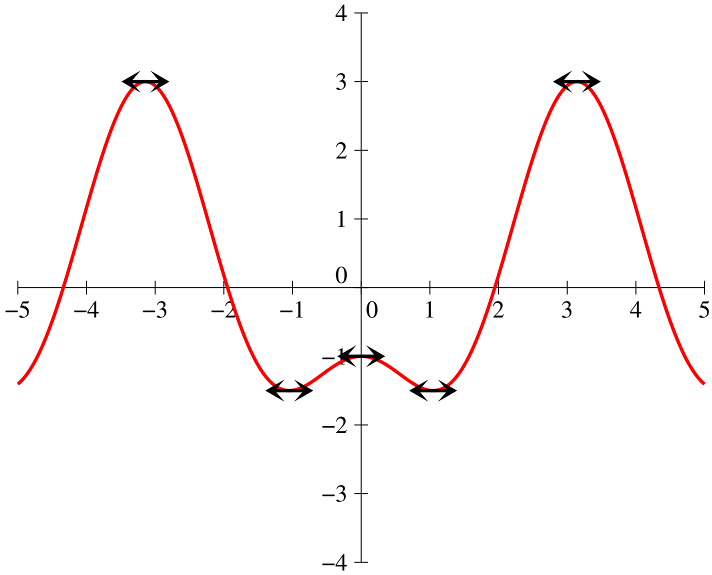


- La fonction h est bien sûr définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est de plus paire (car la fonction cos est paire) et 2π-périodique (là aussi car cos l'est également). On peut donc restreindre l'étude de la fonction à l'intervalle $[0, \pi]$, et compléter la courbe ensuite par symétrie par rapport à (Oy) puis en exploitant la périodicité.

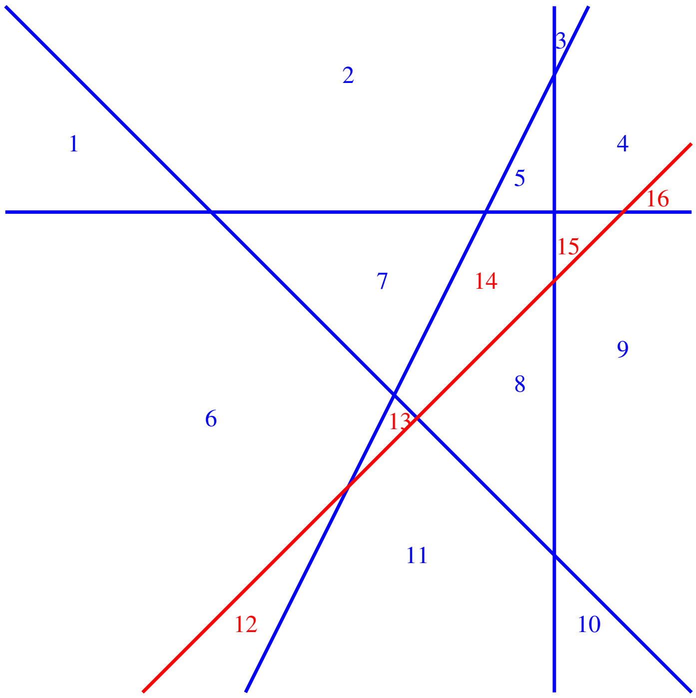
  La dérivée de notre fonction est donnée par $h'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$ (en exploitant la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$; si on ne connait pas cette formule on peut quand même s'en sortir mais le calcul est plus long). Sur $[0, \pi]$, le sinus est toujours positif (mais s'annule en 0 et en π), reste à déterminer le signe de $1 - 2\cos(x)$. Cette expression est positive lorsque $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui, sur l'intervalle $[0\pi]$, se produit sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. La dérivée change donc de signe en $\frac{\pi}{3}$, qui est un minimum local de la fonction de valeur $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. On calcule également $h(0) = 0$ et $h(\pi) = 1 - (-2) = 3$ pour compléter le tableau de variations de h :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
h	0	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

  En complétant par symétrie et par périodicité, on obtient une courbe ressemblant à ceci :



Exercice 2



1. Le dessin ci-dessus montre que $u_4 = 11$ (zones et droites indiquées en bleu) et $u_5 = 16$ (cinquième droite et nouvelles zones indiquées en rouge).
2. Il semblerait qu'on ait toujours $u_{n+1} = u_n + n + 1$. C'est en fait normal : imaginons qu'on ait déjà tracé n droites délimitant u_n zones dans le plan. Si on ajoute une nouvelle droite à notre figure, elle va traverser (sauf cas très particulier) $n+1$ zones parmi celles déjà existantes (elle va changer de zone traversée à chaque fois qu'elle coupe une autre droite, comme il y a n droites à couper, celà fait bien $n+1$ zones traversées), ce qui revient à dire qu'elle va couper en deux $n+1$ zones, sans toucher aux autres zones. Ce qui revient bien à ajouter $n+1$ zones au total précédent, d'où $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

3. Puisque (u_n) est définie à partir du rang 1 (quoiqu'il soit assez facile et cohérent d'ajouter la valeur $u_0 = 1$ au début de la suite), on va faire de même pour (v_n) : $v_1 = 2$, $v_2 = 6$, $v_3 = 12$, $v_4 = 20$ et $v_5 = 30$. Il semblerait qu'on ait toujours $v_n = 2u_n - 2$, ou si on préfère que $u_n = \frac{v_n}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, ce qui donnerait donc $u_{100} = \frac{100 \times 101}{2} + 1 = 5\ 051$. Je vous laisse faire un petit dessin pour vérifier.
4. Essayons donc de démontrer par récurrence la propriété que nous allons noter P_n : $u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Initialisons la récurrence au rang $n = 1$: on sait alors que $u_1 = 2$ et $\frac{1 \times 2}{2} + 1 = 2$, tout va bien. Supposons désormais la propriété vérifiée au rang n, on peut alors écrire que $u_{n+1} = u_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1$ (en exploitant l'hypothèse de récurrence). Si on factorise par $n+1$, on a donc $u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$, ce qui est bien la formule apparaissant dans la propriété P_{n+1} (tous les n ont été remplacés par des $n+1$ par rapport à la formule de départ). La propriété P_n est donc vraie au rang 1 et héréditaire, elle est démontrée pour tout entier $n \geqslant 1$.

Problème

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire.

1. La fonction g est bien sûr dérivable sur $[0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 - e^x$. Cette dérivée s'annule lorsque $e^x = 1$, c'est-à-dire pour $x = 0$, et elle est en fait négative sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. La fonction g y est donc décroissante. On peut constater en passant que $g(0) = 2 - e^0 = 1$. Pour le calcul de la limite en $+\infty$, on a besoin d'un résultat de croissance comparée. On écrit par exemple $g(x) = e^x \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1\right)$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (c'est ce résultat qui découle de la croissance comparée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ (pas de problème ici), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (intuitivement, dans l'expression de $g(x)$, c'est l'exponentielle qui l'emporte sur la partie affine $x + 2$ et qui impose la limite).
2. (a) La fonction g est strictement décroissante et continue sur $[0, +\infty[$, vérifie $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, celà suffit à affirmer que la fonction prendra exactement une fois chaque valeur inférieure ou égale à 2. Vous avez du voir ce genre de résultat sous forme de conséquences du théorème des valeurs intermédiaires, nous l'énoncerons dans le cours sous l'intitulé « théorème de la bijection » très prochainement.

   On peut ensuite calculer $g(1) = 3 - e > 0$, et $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} - e^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2} - e\sqrt{e} < 0$ (en effet, $e > \frac{5}{2}$ et $\sqrt{e} > 1$ donc $e\sqrt{e} > \frac{5}{2}$), pour constater, en exploitant la décroissance de la fonction g, que nécessairement $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.
3. C'est encore une fois la décroissance de g qui permet de conclure : $g(x)$ est positif si $x \in [0, \alpha]$, et $g(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1. (a) Le dénominateur $xe^x + 1$ ne s'annulant pas quand $x \geqslant 0$, la fonction f est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. On calcule donc la dérivée du quotient : $f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2} = \frac{xe^x + 2e^x - e^{2x}}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2}$, ce qui est bien la formule souhaitée.

(b) Le dénominateur de la fraction et l'exponentielle du numérateur étant bien sûr positifs, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$. Les calculs de la première partie prouvent alors que f est croissante sur l'intervalle $[0, \alpha[$ et décroissante sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$, admettant donc un maximum pour $x = \alpha$.

2. (a) Pour obtenir cette expression, on factorise simplement en haut et en bas par e^x : $f(x) = \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

(b) Sous cette forme, il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathcal{C}$ admettra donc en $+\infty$ une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses.

3. (a) Par définition, α étant la valeur d'annulation de la fonction g, on a $\alpha + 2 - e^\alpha = 0$, donc $e^\alpha = \alpha + 2$. On peut donc écrire $f(\alpha) = \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1} = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \dfrac{1}{\alpha+1}$ en reconnaissant au dénominateur une identité remarquable.

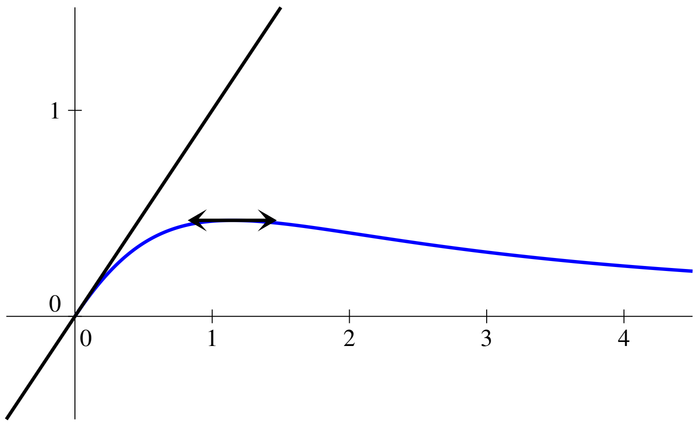
(b) On sait que $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$, donc $2 < \alpha + 1 < \dfrac{5}{2}$, puis $\dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{2}$ (attention à changer le sens des inégalités en passant à l'inverse). Autrement dit, $f(\alpha) \in [0.4, 0.5]$.

4. Puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ (calculs immédiats), la tangente a pour équation $y = x$.

5. (a) Commençons par écrire $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \dfrac{e^x - 1 - x(xe^x+1)}{xe^x+1} = \dfrac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x+1}$. Or, en développant, $(x+1)e^x = xe^x - x^2e^x - x + e^x - xe^x - 1 = e^x - x^2e^x - x - 1$, c'est bien la même chose que le numérateur de $f(x) - x$, ce qui prouve la formule demandée.

(b) La fonction u est bien sûr dérivable, de dérivée $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$. Cette dérivée étant négative sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction u est donc décroissante. Comme de plus $u(0) = 0$, la fonction u est donc toujours négative (ce qui revient à dire que $f(x) \leqslant x$, donc que la courbe $\mathcal{C}$ est toujours située en-dessous de la tangente T).

6. Voici la courbe, le maximum est ici indiqué de façon exacte mais bien sûr, on se contente des approximations calculées plus haut sur une copie :



Partie C : calcul d'aire et étude d'une suite.

1. Il faut être un peu attentif pour cette question et se rappeler que $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. Cette forme est très intéressante dans la mesure où le numérateur n'est autre que la dérivée du dénominateur. On a donc $f(x) = \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, où $h(x) = x + e^{-x}$ est toujours positif sur $[0, +\infty[$. La fonction $\ln(h)$ est alors une primitive de f. Autrement dit, on peut poser $F(x) = \ln(x + e^{-x})$.

2. Puisque la droite (T) a pour équation $y = x$ et que la courbe représentative de f est toujours située en-dessous de cette droite, il s'agit simplement de calculer $\int_0^1 x - f(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - F(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) = \frac{1}{2} - \ln(e+1) + \ln(e) = \frac{3}{2} - \ln(e+1)$.

3. (a) On a en fait déjà calculé $v_0 = \int_0^1 f(x)\ dx = \ln(e+1) - 1$. On calcule exactement de la même façon $v_1 = \int_1^2 f(x)\ dx = [F(x)]_1^2 = \ln(2+e^{-2}) - \ln(1+e^{-1}) = \ln(2e^2+1) - 2 - \ln(e+1) + 1 = \ln\left(\frac{2e^2+1}{e+1}\right) - 1$. Enfin, $v_2 = \int_2^3 f(x)\ dx = [F(x)]_2^3 = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2}) = \ln(3e^3 + 1) - 3 - \ln(2e^2 + 1) + 2 = \ln\left(\frac{3e^3+1}{2e^2+1}\right) - 1$. Ces valeurs ne se simplifient pas et n'ont essentiellement aucun intérêt.

   (b) Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'il s'agit de l'aire sous la courbe, comprise entre les droite verticales d'équations $x = n$ et $x = n + 1$.

   (c) On sait que, sur tout l'intervalle $[2, +\infty[$, la fonction f est décroissante. On peut donc écrire que, si $n \leqslant x \leqslant n + 1$ (avec $n \geqslant 2$), on aura $f(n + 1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. Il suffit alors d'intégrer cet encadrement entre n et $n + 1$ (intervalle de largeur 1) pour obtenir l'encadrement demandé. En combinant cet encadrement avec l'encadrement similaire $f(n+2) \leqslant \int_{n+1}^{n+2} f(x)\ dx \leqslant f(n+1)$ (il suffit de remplacer n par $n+1$ pour obtenir ce dernier) on en déduit facilement que $v_{n+1} \leqslant f(n + 1) \leqslant v_n$, et donc que la suite (v_n) est décroissante (au moins à partir du rang 2).

   (d) La suite (v_n) étant constituée de valeurs positives, elle est donc décroissante et minorée par 0, donc elle converge nécessairement. On peut d'ailleurs ne pas s'embêter avec cet argument et se contenter d'appliquer directement le théorème des gendarmes à l'encadrement de la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} f(n + 1) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.