TD n° 1

PTSI B Lycée Eiffel

3 septembre 2020

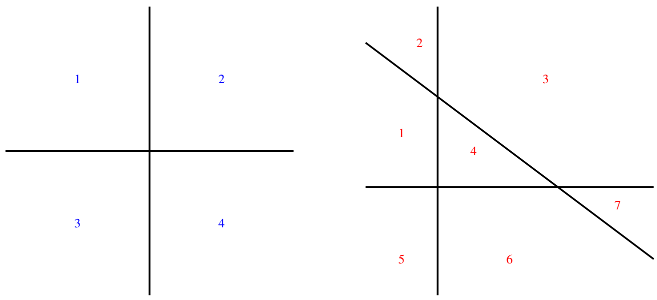
Exercice 1

Après avoir précisé ce que recouvre exactement l'expression « étude complète d'une fonction », effectuer l'étude la plus complète possibles des trois fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - x - 3}$
- $g(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$

Exercice 2

Deux droites sécantes dans le plan découpent le plan en quatre régions distinctes. Trois droites sécantes délimitent (au maximum) sept régions distinctes (voir figure ci-dessous). Le but de cet exercice est de déterminer le nombre maximal de régions délimitées par n droites sécantes dans le plan. On notera ce nombre u_n.



1. Déterminer les valeurs de u_4 et u_5 (on se contentera de petits dessins, sans chercher à faire une justification rigoureuse).
2. Quelle relation peut-on imaginer entre deux termes successifs u_n et u_{n+1} de la suite (u_n) ? Essayer de donner une explication de cette relation.
3. On note $v_n = n(n+1)$. Calculer les premiers termes de la suite (v_n) et les comparer à ceux de la suite (u_n) (on doit trouver une relation simple entre les deux). En déduire la valeur de u_n puis, par exemple, celle de u_{100}.
4. Redémontrer la formule obtenue pour u_n par récurrence en exploitant la relation obtenue à la question 2.

Problème

Pour les plus curieux, je signale que ce problème est bêtement extrait d'un sujet de bac, donc devrait être une simple formalité. Bon, un sujet de bac un peu ancien, certes.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire.

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1. Étudier les variations de g et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$. On note α cette solution.
   (b) Prouver que $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathcal{C}$.

1. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
3. (a) Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.
   (b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la première partie de l'exercice, donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$, où $u(x) = e^x - xe^x - 1$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.
   (c) Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (T).
6. Tracer une allure de $\mathcal{C}$ et de (T) dans un même repère.

Partie C : calcul d'aire et étude d'une suite.

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0, +\infty[$.
2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Interpréter graphiquement v_n.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx \leqslant f(n)$. En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (v_n).