

NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

29 mars 2021

1. Rappeler les définitions (avec des beaux quantificateurs) des termes de vocabulaire suivants : famille libre, famille génératrice, base.
2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ la famille de vecteurs $\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 1), (2, -1, -1, 0))$.
 - (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
 - (b) Compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^4$ en détaillant bien les calculs effectués.
 - (c) Calculer les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$ dans la base obtenue à la question précédente.
3. On se place dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, et on note $F = \{aX^4 + (a+b)X + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, et $G = \{P \in E \mid P'(1) = P'(2) = 0\}$.
 - (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , donner sa dimension et préciser une base de F .
 - (b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E , donner sa dimension et préciser une base de G .
 - (c) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires dans E (justifier) ?
 - (d) Montrer que tout polynôme appartenant à F est divisible par $X+1$. La réciproque est-elle vraie ?
4. On note $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
 - (a) En définissant $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}$, donner une base et la dimension des espaces F et G (on admet qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).
 - (b) Montrer que, si on remplace la matrice A par une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on aura toujours $F \subset G$. À quelle condition sur A les deux sous-espaces sont-ils égaux ?