

Interrogation Écrite n° 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 février 2021

1. Pour la limite en 0, le mieux est de multiplier par la quantité conjuguée : $f(x) = \frac{x(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x})}{1+x^2-1-x} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x}}{x-1}$. Il n'y a plus de forme indéterminée, on obtient donc facilement $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$.

De l'autre côté, par contre, cette méthode ne résoudra rien, et surtout n'est pas du tout nécessaire, factoriser le dénominateur étant suffisant (on suppose $x > 0$ pour le calcul) :

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}}. \text{ Là encore, plus de forme indéterminée puisque la deuxième racine du dénominateur tend vers 0 et la première vers 1 :}$$

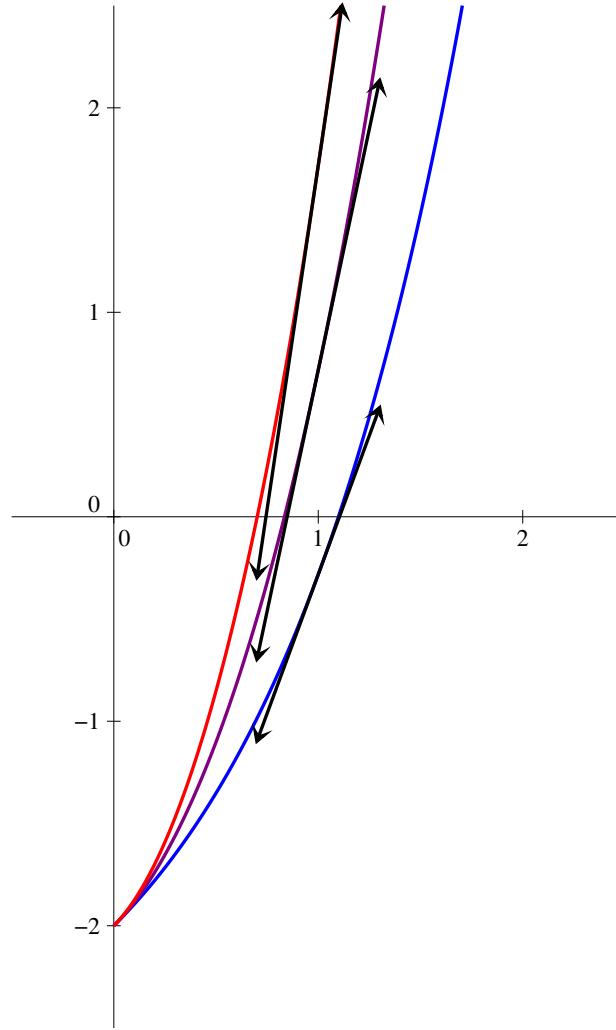
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables partout ailleurs qu'en 0 par théorèmes généraux. Pour étudier la dérivabilité en 0, on reviendra à chaque fois à la définition et on calculera donc un joli taux d'accroissement. Commençons par $g : \tau_{0,g}(h) = \frac{|h|\sin(h)}{h}$, donc $\tau_{0,g}(h) = \sin(h)$ si $h > 0$, et $\tau_{0,g}(h) = -\sin(h)$ si $h < 0$. Dans les deux cas, la limite quand h tend vers 0 est nulle, donc la fonction g est bien dérivable en 0, et $g'(0) = 0$. Même principe pour la deuxième fonction (la notation n'est pas très heureuse pour une fonction qui s'appelle h mais tant pis) : $\tau_{0,h}(h) = \frac{\ln(1+|h|)}{h}$, donc $\tau_{0,h}(h) = \frac{\ln(1+h)}{h}$ si $h > 0$. On connaît bien la limite de ce quotient quand h tend vers 0, on peut donc en conclure que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau_{0,h}(h) = 1$.

De l'autre côté, on aura de même $\tau_{0,h}(h) = \frac{\ln(1-h)}{h}$ si $h < 0$. Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1-h)}{-h} = 1$ (c'est la même limite que celle déjà utilisée à droite), ce qui suffit à affirmer que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \tau_{0,h}(h) = -1$.

La fonction h n'est donc pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative y admettra deux demi-tangentes, de pente 1 à droite de 0 (et donc d'équation $y = x$) et de pente -1 à gauche (et donc d'équation $y = -x$).

3. (a) Les fonctions f_n sont trivialement strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ comme somme d'une exponentielle strictement croissante et de fonctions croissantes. De plus, $f_n(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc, étant continues, les fonctions sont bijectives de $[0, 1]$ vers $[-2, +\infty[$. En particulier, 0 qui est un réel appartenant à $[-2, +\infty[$ admet une unique antécédent u_n par la fonction f_n .
- (b) On calcule bêtement $f_n(1) = e + n - 3$ et $f'_n(x) = e^x + 2nx$, donc $f'_n(1) = e + 2n$. On en déduit que la tangente demandée a pour équation $y = (e + 2n)(x - 1) + e + n - 3 = (e + 2n)x - n - 3$.
- (c) Voici les courbes demandées (la tangente en 0 a toujours pour pente 1), avec bien sûr la courbe de f_0 en bleu, celle de f_1 en violet et celle de f_2 en rouge :



- (d) Par définition, u_0 est solution de l'équation $e^x - 3 = 0$, donc $u_0 = \ln(3)$. Lorsque $n \geq 1$, $f_n(1) = e + n - 3 \geq 0$, donc (par croissance de la fonction f_n) on aura $u_n < 1$, ce qui prouve que $u_n \in]0, 1[$ (on ne peut bien sûr pas avoir $f_n(1) = 0$, et encore moins $f_n(0) = 0$, donc u_n n'est égal ni à 0 ni à 1).
- (e) Il suffit de constater que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^x + (n+1)x^2 - 3 - e^x - nx^2 + 3 = x^2$ pour en déduire que $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$. En particulier, $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$, avec par définition $f_n(u_n) = 0$, donc $f_{n+1}(u_n) > 0$, et on a aussi $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. Il suffit d'appliquer la croissance de la fonction f_{n+1} pour en déduire que $u_n > u_{n+1}$, et donc que la suite (u_n) est décroissante.
- (f) La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge nécessairement vers une limite $l \geq 0$. Si on avait $l > 0$, on en déduirait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n^2 = +\infty$. Or, par définition de la suite (u_n) , on a toujours $n u_n^2 = 3 - e^{u_n}$, et $3 - e^{u_n}$ a nécessairement une limite finie. L'hypothèse $l > 0$ est donc absurde, ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- (g) On reprend le même calcul de limite qu'à la question précédente, mais à l'envers : on sait maintenant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - e^{u_n} = 2$, donc on a nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n u_n}{2} = 1$. Comme $n u_n$ est toujours positif, on en déduit sans mal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} u_n = 1$.