

NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n° 5

PTSI B Lycée Eiffel

4 février 2021

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$

2. Étudier la dérivabilité en 0 des deux fonctions $g : x \mapsto |x| \sin(x)$ et $h : x \mapsto \ln(1 + |x|)$. On précisera éventuellement l'existence de demi-tangentes aux courbes correspondantes.

3. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$.
 - (a) Étudier les variations de f_n et en déduire l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
 - (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f_n en son point d'abscisse 1.
 - (c) Tracer dans un même repère une allure des courbes des fonctions f_0 , f_1 et f_2 (ainsi que des tangentes calculées à la question précédente).
 - (d) Calculer u_0 . Montrer que, $\forall n \geq 1$, $u_n \in]0, 1[$.
 - (e) Montrer que, $\forall x \in]0, 1[$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$. En déduire la monotonie de (u_n) .
 - (f) Montrer la convergence de (u_n) , puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (on pourra faire un raisonnement par l'absurde).
 - (g) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} u_n$.