Interrogation Écrite n° 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 novembre 2020

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{2}{t^2}\, dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^3 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$.
2. Pour le calcul de I_2, on va effectuer une IPP en posant $u(x) = \ln(x)^2$, donc $u'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$, et $v'(x) = 1$ qu'on peut primitiver en $v(x) = x$. Toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et même plus sur l'intervalle d'intégration, donc $I_2 = [x(\ln(x))^2]_1^e - \displaystyle\int_1^e 2\ln(x)\, dx = e - 2[x\ln(x) - x]_1^e = e - 2(e - e + 1) = e - 2$.
3. Comme ce qui est sous la valeur absolue change de signe sur l'intervalle d'intégration, le plus simple est de découper l'intégrale en deux via une relation de Chasles : $I_3 = \displaystyle\int_0^1 |3t-1|\, dt = \int_0^{\frac{1}{3}} 1 - 3t\, dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 3t - 1\, dt = \left[t - \frac{3}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{3}{2}t^2 - t\right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{6}$.
4. Nul besoin d'IPP ou de méthode compliquée ici, on doit trouver une primitive directe : $I_4 = \displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}[-e^{-x^2}]_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}$.
5. Il faut faire une décomposition en éléments simples. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$ et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On peut donc écrire notre fraction sous la forme $\dfrac{x+2}{x^2 - 3x - 4} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$, où a et b sont deux constantes réelles. Pour déterminer rapidement a, on multiplie l'égalité par $x+1$ pour obtenir $\dfrac{x+2}{x-4} = a + \dfrac{b(x+1)}{x-4}$ puis on pose $x = -1$, ce qui donne $a = -\dfrac{1}{5}$. Même principe pour b en multipliant par $x - 4$ puis en posant $x = 4$: $\dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{a(x-4)}{x+1} + b$, donc $b = \dfrac{6}{5}$.

   Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale en faisant attention aux signes : $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^2 - 3x - 4}\, dx = \int_0^1 \frac{6}{5(x-4)} - \frac{1}{5(x+1)}\, dx = \left[\frac{6}{5}\ln(4-x) - \frac{1}{5}\ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{6}{5}\ln(3) - \frac{6}{5}\ln(4) - \frac{1}{5}\ln(2) = \frac{6\ln(3) - 13\ln(2)}{5}$.
6. Effectuons ici une petite IPP (on peut séparer l'intégrale en deux mais ce n'est même pas nécessaire) en posant $u(t) = 2t + 1$, et donc $u'(t) = 2$, et $v'(t) = \cos(t)$ qu'on va primitiver en $v(t) = \sin(t)$. Les deux fonctions sont certainement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration, et $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+1)\cos(t)\, dt = [(2t+1)\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\, dt = \pi + 1 + [2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 1$.
7. Puisqu'on nous le propose si gentiment, commençons donc par poser $t = \sqrt{x+1}$, soit $x = t^2 - 1$. L'élément différentiel deviendra donc $dx = 2t\, dt$, et les bornes seront égales à $\sqrt{2}$ et 2. Autrement dit, $I_7 = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t}{(t^2-1)\times t}\, dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2}{(t-1)(t+1)}\, dt$. Il reste à faire une petite décomposition en éléments simples pour écrire la fraction sous

la forme $\dfrac{2}{(t+1)(t-1)} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t-1}$. En multipliant par $t-1$ puis en posant $t = 1$, on trouve $b = 1$. De même en multipliant par $t+1$ et en prenant $t = -1$, on obtient $a = -1$, soit $\frac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$ (formule qu'on pouvait presque obtenir sans calcul). Il ne reste plus qu'à achever le calcul : $I_7 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\, dt = [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_{\sqrt{2}}^{2} = -\ln(3) + \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1) = -\ln(3) + 2\ln(\sqrt{2}+1)$.