Devoir Surveillé n^o 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 mai 2021

Exercice 1

1. Il suffit de « résoudre » constitué par les deux équations définissant F pour l'écrire « sous forme de Vect ». Autant même commencer par la deuxième équation : $x = z + 2t$, puis en reportant dans la première $y = -x - z - t = -2z - 3t$. On peut alors écrire $F = \{(z + 2t, -2z - 3t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$. En particulier, F est bien un sous-espace vectoriel de E, la famille $((1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1))$ en constitue une base (les deux vecteurs ne sont manifestement pas proportionnels), et $\dim(F) = 2$.
2. En notant e_1, e_2, e_3 et e_4 les quatre vecteurs de la famille, l'égalité $\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3+\lambda_4 e_4 = 0$ (avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$) se traduit par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & a\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$.
On peut déjà supprimer une des équations identiques, puis exprimer à l'aide des deux premières équations $\lambda_3 = -\dfrac{1}{2}\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\lambda_2$, et $\lambda_4 = -\dfrac{1}{2}\lambda_1 - \dfrac{1}{2}\lambda_2$. On reporte dans la quatrième équation : $\lambda_1 - \dfrac{a}{2}\lambda_1 + \dfrac{a}{2}\lambda_2 - \dfrac{1}{2}\lambda_1 - \dfrac{1}{2}\lambda_2 = 0$, ce qui donne $(1 - a)\lambda_1 + (a - 1)\lambda_2 = 0$. On peut distinguer deux cas :
   - si $a = 1$, la dernière équation est toujours vérifiée, et on ne conserve que les deux conditions sur λ_3 et λ_4. Ces deux conditions imposent en fait que $e_4 = e_1 + e_2$ et $e_3 = e_1 - e_2$ (ce qui est bien vérifié si $a = 1$). La famille n'est donc pas du tout libre, et G est alors de dimension 2, avec pour base (e_1, e_2) (qui, eux, ne sont pas proportionnels).
   - si $a \neq 1$, on ne conserve que la condition $e_4 = e_1 + e_2$, mais la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, et $\dim(G) = 3$. La famille complète n'est par contre jamais libre.
3. (a) On a dans ce cas, d'après la question précédente, $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0), (0, 2, 0, 0))$. Soit $u \in G$, on peut donc écrire $u = a(1, 1, 1, 1) + b(1, -1, 1, 0) + c(0, 2, 0, 0) = (a + b, a - b + 2c, a + b, a)$. Si on souhaite avoir également $u \in F$, on doit vérifier les deux équations définissant F, donc $a+b+a-b+2c+a+b+a = a+b-a-b-2a = 0$. La deuxième équation donne immédiatement $a = 0$, puis la première se simplifie en $b + 2c = 0$, soit $b = -2c$. On a alors $u = (-2c, 4c, -2c, 0)$, ce qui prouve que $F \cap G = \text{Vect}((1, -2, 1, 0))$ (on a tout divisé par 2 et changé de signe par souci de simplicité). On a donc $\dim(F \cap G) = 1$.

   (b) En appliquant la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) = 2 + 3 - 1 = 4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$. En particulier, la base canonique $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $F + G$. Les sous-espaces ne sont pas supplémentaires puisque $F \cap G$ n'est pas réduit au vecteur nul.

   (c) En reprenant un calcul précédent, on doit avoir $v = (a+b, a-b+2c, a+b, a)$. De même, le vecteur v doit s'écrire sous la forme $\alpha(1, -2, 1, 0)+\beta(2, -3, 0, 1) = (\alpha+2\beta, -2\alpha-3\beta, \alpha, \beta)$, mais on va décréter unilatéralement qu'on se permettra de prendre $\alpha = 0$, puisque le vecteur $(1, -2, 1, 0)$ étant dans l'intersection des deux sous-espaces, on peut déjà l'obtenir à l'aide du vecteur u. La condition $v + w = (1, 2, 3, 4)$ se traduit alors par le système

$\begin{cases} a + b + 2\beta = 1 \\ a - b + 2c - 3\beta = 2 \\ a + b = 3 \\ a + \beta = 4 \end{cases}$. On va résoudre ce système par substitution (pour une fois) : $\beta = 4-a$ (dernière équation) et $b = 3-a$ (troisième équation) donc en reportant dans la première équation : $a+3-a+8-2a = 1$, donc $2a = 10$ et $a = 5$, ce qui implique $\beta = -1$ et $b = -2$. Reste à tout mettre dans la deuxième équation : $5+2+2c+3 = 2$ donc $c = -4$. On a obtenu une solution unique au système, mais la décomposition n'est pas du tout unique puisqu'on aurait pu trouver d'autres solutions en n'imposant par la condition $\alpha = 0$. Donnons quand même les deux vecteurs correspondants : $v = \beta(2,-3,0,1) = (-2,3,0,-1)$ et $v = (1,2,3,4) - w = (3,-1,3,5)$ (c'est plus rapide que de recalculer à partir des valeurs de a, b et c).

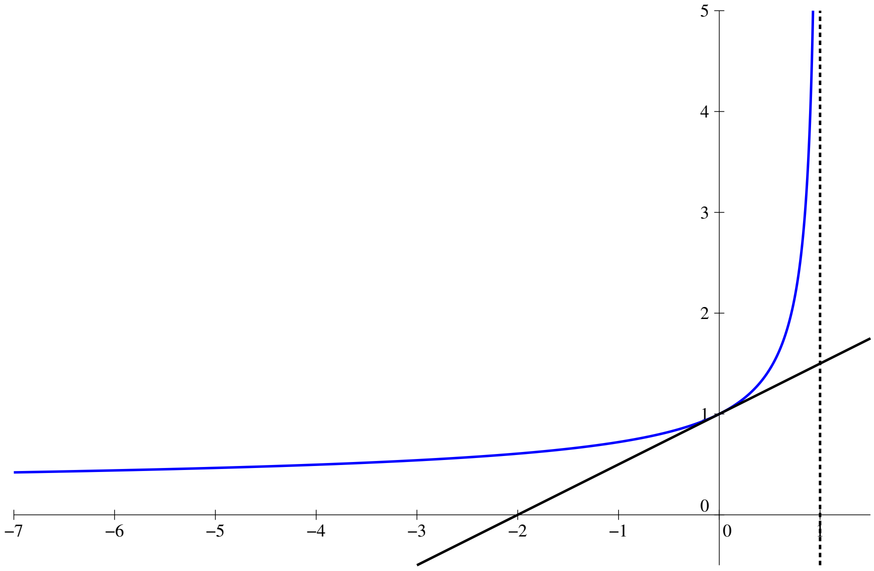
Exercice 2

1. Pour que f soit définie, il fait avoir $x < 1$ (à cause du $\ln(1-x)$), $x \neq 1$ et $x \neq 0$ pour ne pas annuler les deux facteurs du dénominateur, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0,1[$.
2. Toutes les fonctions manipulées sont dérivables sur chaque intervalle de leur ensemble de définition. Commençons par poser $g(x) = (x-1)\ln(1-x)$ et constatons que $g'(x) = \ln(1-x) - \dfrac{x-1}{1-x} = \ln(1-x) + 1$. Ensuite, $f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln(1-x) - x\ln(1-x) - x}{(x-1)^2\ln^2(1-x)} = \dfrac{-x-\ln(1-x)}{(x-1)^2\ln^2(1-x)}$. Cette dérivée est du signe de $h(x) = -x - \ln(1-x)$, qu'on va elle-même dériver : $h'(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x}{1-x}$. La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0,1[$. Or, $h(0) = 0$, ce qui prouve que h est positive sur chacun des deux intervalles de définition de f, et donc que f est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.
3. Commençons par calculer un DL (à l'orde 4, car on va avoir besoin de simplifer avec le x du numérateur, ce qui va faire perdre un degré) de $(1-x)\ln(1-x) = (1-x)\left(-x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) = -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4) = -x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4)$. Après changement de signe et simplification des x, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ en posant $u = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$, quantité qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Terminons le calcul en ne gardant bien sûr que les termes de degré inférieur ou égal à 3 : $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{12}x^2 + \dfrac{3}{8}x^3 + o(x^3)$. On en déduit successivement les choses suivantes :
   - $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction z vérifiant $z(0) = 1$ et $z(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}_f$.
   - $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$, donc la fonction admet un DL d'ordre 1 en 0, ce qui prouve que son prolongement z est dérivable en 0 et que $z'(0) = \dfrac{1}{2}$.
   - $f(x) - \left(1 + \dfrac{1}{2}x\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{6}x^2 > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ au voisinage de 0.
4. Il ne reste qu'à calculer les limites. En posant $X = 1-x$, on a $(x-1)\ln(1-x) = -X\ln(X)$, qui a une limite nulle quand x tend vers 1, donc X vers 0 (résultat classique de croissance comparée). Comme cette quantité est par ailleurs positive sur $]0,1[$ (chacun des deux termes

du produit est négatif), on en déduit que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$. Enfin, on peut écrire $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{x}{x\ln(1-x)} \sim \dfrac{1}{\ln(1-x)}$, donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. On conclut avec le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Voici l'allure de courbe demandée :



Exercice 3

1. La fonction $f : x \mapsto x + e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes. De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (trivial) et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (trivial aussi, il n'y a pas la moindre forme indéterminée). Comme f est bien entendu continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'équation $f(x) = a$ admet donc une unique solution quel que soit le réel a, et en particulier pour tout entier naturel n.
2. La fonction f étant bijective, elle admet une réciproque g qui est elle-même continue et strictement croissante (théorème de la bijection). On peut alors écrire $u_n = g(n)$, et la croissance de (u_n) découle alors de celle de g.
3. On peut obtenir la limite directement en exploitant le fait que $u_n = g(n)$, mais l'énoncé incite plutôt à faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) soit majorée et converge donc vers une limite l. On aura alors $\lim_{n \to +\infty} e^{u_n} = e^l$, donc $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l + e^l$. Or, par définition, $f(u_n) = n$ diverge vers $+\infty$. C'est contradictoire, la suite ne peut donc pas être majorée, et étant croissante, on a nécessairement $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   Un résultat de croissance comparée classique prouve alors que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{e^{u_n}} = 0$, ce qui signifie bien que $u_n = o(e^{u_n})$.
4. On sait que $u_n + e^{u_n} = n$ (définition de la suite) et que $u_n + e^{u_n} = e^{u_n} + o(e^{u_n}) \sim e^{u_n}$, donc $e^{u_n} \sim n$. Attention à ne pas conclure trop rapidement que $u_n \sim \ln(n)$, on ne peut pas composer des équivalents par la fonction ln. Faisons donc les choses correctement : $e^{u_n} = n + o(n)$, donc

$u_n = \ln(n + o(n)) = \ln(n(1 + o(1))) = \ln(n) + \ln(1 + o(1))$. Par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} o(1) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+o(1)) = \ln(1) = 0$. Cette quantité est donc négligeable par rapport à $\ln(n)$, et on peut écrire $u_n = \ln(n) + o(\ln(n))$, soit $u_n \sim \ln(n)$.

5. (a) Par définition, $e^{v_n} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{\ln(n)}} = \dfrac{n - u_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(n) + o(\ln(n))}{n} = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ en exloitant en cours de route la définition de la suite (u_n) et son équivalent obtenu à la question précédente.

   (b) On écrit donc $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right) \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$ puisqu'on peut exploiter l'équivalent classique $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$, avec ici $u = -\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$, qui est bien une quantité ayant une limite nulle par croissance comparée.
   On reporte ensuite : $v_n = -\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$, puis $u_n = v_n + \ln(n) = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

   (c) On repart d'abord de $e^{v_n} = 1 - \dfrac{u_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$, puis on calcule $v_n = \ln\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)\right) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$, en posant $u = -\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$, quantité qui a certainement une limite nulle. On trouve alors $v_n = -\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} - \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$. Parmi les deux termes ajoutés, le « plus fort » est le deuxième puisqu'il a un facteur $\ln(n)$ en plus (qui tend vers $+\infty$) au numérateur, c'est donc le seul qu'on gardera. On conclut : $u_n = \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

Exercice 4

1. C'est du cours : dimension 5 et base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ (dans cet ordre).
2. Il faut donc vérifier que tout polynôme de G s'annule pour $X = -1$. En effet, si $G = aX^3 + bX^2 + bX + a$, alors $G(-1) = -a + b - b + a = 0$.
3. La famille de trois vecteurs engendrant F est libre puisqu'échelonnée, c'est donc une base de F et $\dim(F) = 3$. De même, on peut écrire G sous la forme $G = \mathrm{Vect}(X^3 + 1, X^2 + X)$, donc $\dim(G) = 2$ et $(X^3 + 1, X^2 + X)$ est une base de G (polynômes non proportionnels).
4. Non, ils ne sont pas en somme directe car on n'a pas $F \cap G = \{0\}$. Même pas besoin de faire de calcul, il saute aux yeux que $X^3 + X^2 + X + 1$ appartient à la fois à F (puisque s'écrivant $(X^3 + X) + (X^2 + 1)$) et à G (en prenant $a = b = 1$). S'ils ne sont pas en somme directe, F et G ne peuvent a fortiori pas être supplémentaires.
5. Cherchons tout simplement à obtenir une base de H en résolvant un système. Si on pose $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in E$, on aura $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d$, donc $P \in H \Leftrightarrow 4a+3b+2c+d = -4a+3b-2c+d = 0$. En additionnant ces deux conditions, on trouve $d = -3b$, en les soustrayant on trouve $c = -2a$, ce qui prouve que $H = \{aX^4 + bX^3 - 2aX^2 - 3bX + e \mid (a, b, e) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Vect}(X^4 - 2X^2, X^3 - 3X, 1)$. La famille génératrice obtenue est échelonnée donc libre, c'est bien une base de H. Accessoirement, on a donc prouvé que $\dim(H) = 3$.
6. Tout polynôme P appartenant à G est divisible par $X + 1$ donc vérifie $P(-1) = 0$. S'il appartient en plus à H, il doit également vérifier $P'(-1) = 0$, donc -1 est bien racine au moins double du polynôme P.

7. Pour s'amuser, essayons d'exploiter ce qui précède. Si $P \in G \cap H$, P est divisible par $(X+1)^2$ et de degré au maximum 3 (aucun polynôme de degré 4 n'appartient à G), donc de la forme $P = (X+1)^2(cX+d) = (X^2+2X+1)(cX+d) = cX^3 + (2c+d)X^2 + (2d+c)X + d$. Un tel polynôme n'appartient à G que si $c = d$, donc si $P = c(X^3+3X^2+3X+1) = c(X+1)^3$. Mais alors $P' = 3c(X+1)^2$ ne vérifie absolument par $P'(1) = 0$, sauf bien sûr dans le cas où $c = 0$, donc $P = 0$. On vient en fait de prouver un peu étrangement que $G \cap H = \{0\}$. Comme de plus $\dim(G) + \dim(H) = 2 + 3 = 5 = \dim(E)$, les sous-espaces G et H sont bien supplémentaires.