

Devoir Surveillé n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 février 2021

Exercice 1 : Mise en jambes.

1. Commençons par écrire le nombre a sous forme exponentielle : $|a| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $a = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. En posant maintenant $z = re^{i\theta}$, l'équation $z^3 = r^3e^{3i\theta} = a$ est équivalente aux deux conditions $r^3 = 2\sqrt{2}$ et $3\theta \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$. On en déduit que $r = \sqrt{2}$ (r étant le module du nombre z , donc un nombre réel strictement positif), et $\theta \equiv -\frac{\pi}{4} \left[\frac{2\pi}{3} \right]$. Il y a donc trois solutions : $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$. Les deux dernières racines cubiques ne peuvent pas s'exprimer sous forme algébrique sans calculs compliqués.
2. On commence par linéariser le $\cos^3(x)$, soit en utilisant directement la formule de tripllication du cosinus, soit plus classique en utilisant les formules d'Euler, ce que nous allons faire ici : $\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{2\cos(3x) + 6\cos(x)}{8} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$. Il ne reste plus qu'à calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \, dx = \left[\frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$.
3. Cette équation implique certainement que $\tan(\arctan(2x) + \arctan(3x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. En appliquant la formule de duplication des tangentes, le membre de gauche de l'égalité précédente est égal à $\frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan(3x))}{1 - \tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(3x))} = \frac{5x}{1 - 6x^2}$ (on a tout à fait le droit de simplifier ici). On doit donc avoir $5x = 1 - 6x^2$, soit $6x^2 + 5x - 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$ et pour racines $x_1 = \frac{-5-7}{12} = -1$ et $x_2 = \frac{-5+7}{12} = \frac{1}{6}$. Il faut vérifier ces solutions car la première étape de notre calcul n'a aucune raison d'être une équivalence. De fait, -1 ne peut pas être solution puisque $\arctan(-2) + \arctan(-3) < 0$. Par contre, $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (on additionne deux arctangente de nombres positifs et inférieurs à 1), donc le fait que sa tangente soit égale à 1 suffit à prouver que ce nombre est égal à $\frac{\pi}{4}$. Autrement dit, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$.
4. Le discriminant de l'équation est égal à $(3i-4)^2 - 4(1-7i) = -9-24i+16-4+28i = 3+4i$. On va chercher une racine carrée de ce discriminant sous la forme algébrique $\delta = a + ib$. On aura donc $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \Delta$ si et seulement si $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = 4$. On ajoute comme toujours à ces équations la condition supplémentaire sur le module : $|\delta|^2 = a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{9+16} = 5$. La somme de la première équation et de la troisième donne $2a^2 = 8$ donc $a = \pm 2$, puis $b^2 = 1$, donc $b = \pm 1$. Comme a et b doivent être de même signe (deuxième

équation), on peut prendre $\delta = 2 + i$, et on calcule alors les deux solutions de l'équation $z_1 = \frac{4 - 3i + 2 + i}{2} = 3 - i$ et $z_2 = \frac{4 - 3i - 2 - i}{2} = 1 - 2i$. Autrement dit, $\mathcal{S} = \{3 - i, 1 - 2i\}$.

Exercice 2

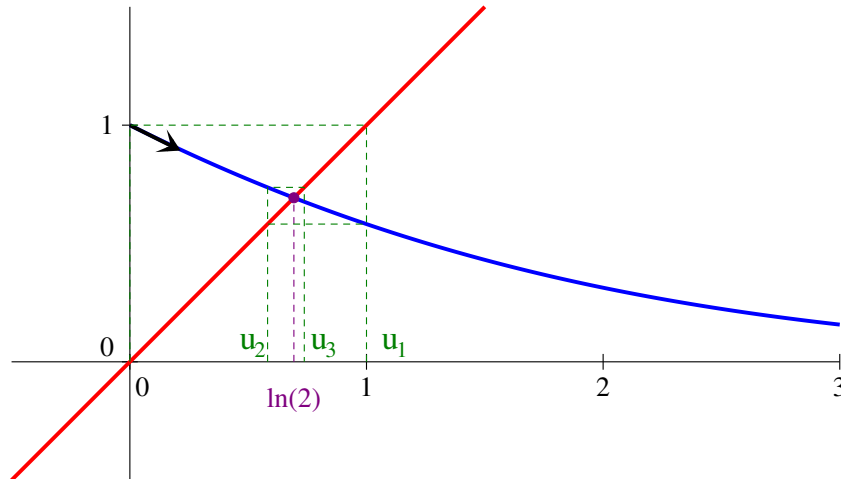
- On sait (limite classique de taux d'accroissement) que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Son inverse a donc la même limite, ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. On peut donc prolonger f sur $[0, +\infty[$ en une fonction $\tilde{f}$ définie par
$$\begin{cases} \tilde{f}(x) &= x \text{ si } x > 0 \\ \tilde{f}(0) &= 0 \end{cases}.$$
- On calcule donc $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$.
- Remplaçons donc tout ce qu'on peut dans l'expression précédente par la formule donnée par l'énoncé :
$$f'(x) = \frac{x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - x - x^2 - \frac{x^3}{2} - x^3\varepsilon(x)}{(x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x))^2}$$
$$= \frac{x^2(-\frac{1}{2} + \varepsilon(x) - \frac{x}{2} - x\varepsilon(x))}{x^2 + x^3 + 2x^3\varepsilon(x) + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x) + x^4\varepsilon^2(x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon(x) - \frac{x}{2} - x\varepsilon(x)}{1 + x + 2x\varepsilon(x) + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x) + x^2\varepsilon^2(x)}.$$
Ce quotient a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0 (tout ce qui n'est pas constant tend vers 0). Le théorème de prolongement de la dérivée permet donc d'affirmer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, et que $\tilde{f}'(0) = -\frac{1}{2}$. Il y aura donc à l'origine une tangente de pente $-\frac{1}{2}$ à la courbe représentative de f .
- Redérivons donc :
$$f''(x) = \frac{(e^x - e^x - xe^x)(e^x - 1)^2 - (e^x - 1 - xe^x) \times 2e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4}$$
$$= \frac{-xe^x(e^x - 1) - 2e^x(e^x - 1 - xe^x)}{(e^x - 1)^3} = \frac{-xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x + 2xe^{2x}}{(e^x - 1)^3}$$
$$= \frac{e^x(xe^x + x - 2e^x + 2)}{(e^x - 1)^3},$$
 ce qui est bien la formule demandée.
- La fonction g est évidemment dérivable, de dérivée $g'(x) = e^x + (x - 2)e^x + 1 = (x - 1)e^x + 1$. Le signe de cette chose n'étant pas franchement limpide, dérivons donc une fois de plus (on n'en est plus à une dérivée près) : $g''(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$. Là, c'est plus évident, $g''(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction g' est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or, $g'(0) = -e^0 + 1 = 0$, donc g' est nécessairement positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme $g(0) = -2 + 2 + 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ (même pas de forme indéterminée pour cette limite), on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
g	0	$+\infty$

- La fonction g étant donc toujours positive, on en déduit que $f''(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ (le dénominateur de f'' étant lui aussi positif sur cet intervalle). La fonction f' est donc croissante. Or, $f'(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{x}{e^x - 2 + e^{-x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ (croissance comparée pour le second quotient). On en déduit que $f'(x) \leq 0$ sur notre intervalle de définition de f , qui est donc décroissante. On a déjà calculé la limite en 0 de f à la première question, reste à signaler que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (toujours de la croissance comparée) pour pouvoir dresser le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
f	1	0

7. En fait, les éléments les plus intéressants de la courbe seront obtenus dans les questions qui vont suivre. Pour l'instant, l'essentiel est de bien indiquer la tangente en 0 calculée plus haut :



8. (a) Il s'agit donc de résoudre l'équation $\frac{x}{e^x - 1} = x$. Une fois la valeur $x = 0$ qu'on ne peut pas considérer comme un point fixe au vu du calcul de limite effectué en tout début d'exercice, on est ramené à la condition $e^x - 1 = 1$, soit $x = \ln(2)$, qui est donc l'unique point fixe de f .
- (b) Cf graphique ci-dessus. Il semble y avoir une convergence « en escargot » vers le point fixe $\ln(2)$, ce qui est tout à fait normal pour une suite dont la fonction de récurrence f est décroissante.
- (c) La fonction f (prolongée par continuité) est continue et décroissante, et vérifie $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, elle est donc bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1]$, ce qui prouve que $f(x) \in [0, 1]$. De plus, f' est croissante sur ce même intervalle avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ (tout cela a été calculé plus haut), donc $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$, ce qui prouve que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- (d) Il s'agit bien sûr d'appliquer l'IAF, mais en ayant vérifié les hypothèses. L'intervalle stable qu'on va prendre est tout bêtement $[0, +\infty[$ tout entier. Il est stable d'après la question précédente, donc on aura toujours $u_n \geq 0$ par récurrence triviale. De plus, $\ln(2) \geq 0$ appartient bien à l'intervalle, et sur cet intervalle $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On peut bien appliquer l'IAF aux valeurs u_n et $\ln(2)$ pour obtenir $|f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$, donc $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$.
- (e) On va d'abord démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}$. C'est bien le cas au rang 0 car $|u_0 - \ln(2)| = \ln(2) \leq 1$. Si on suppose la majoration vérifiée au rang n , alors $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ en appliquant successivement le résultat

découlant de l'IAF et l'hypothèse de récurrence. Comme $0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^n}$, le théorème des gendarmes assure alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ln(2)| = 0$, donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$.

(f) Il suffit de prendre $n = 10$ puisqu'on a alors $|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$.

Exercice 3

- Comme toujours, on peut procéder par un classique pivot de Gauss matriciel (avec ou sans matrice augmentée), mais je vais préférer la méthode du système :
$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x - y + z = c \end{cases}$$

La somme des deux dernières équation donne immédiatement $y = b + c$, on peut ensuite effectuer l'opération $L_1 - L_3$ pour trouver $x + 2y = a - c$, donc $x = a - c - 2(b + c) = a - 2b - 3c$. Enfin, la dernière équation fournit $z = c + y - x = c + b + c - a + 2b + 3c = -a + 3b + 5c$. Le système admet

une solution unique, la matrice P est donc bien inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

- (a) On calcule par exemple d'abord $PA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice T étant triangulaire supérieure stricte, elle sera nilpotente. On obtient de fait

$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = 0$. Bien entendu, on aura $T^n = 0$ pour tout entier $n \geq 3$.

(c) Puisqu'on nous demande d'en déduire, on va exploiter la question précédente, mais en fait un calcul direct aurait été aussi simple. La relation $T = PAP^{-1}$ peut s'écrire sous la forme $A = P^{-1}TP$ en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P . On en déduit que $A^2 = P^{-1}TPP^{-1}TP = P^{-1}TI_3TP = P^{-1}T^2P$, puis $A^3 = P^{-1}T^2PP^{-1}TP = P^{-1}T^3P$. Même pas besoin de récurrence puisqu'on peut arrêter les calculs ici : $A^3 = 0$, donc toutes les puissances suivantes seront également nulles. La seule matrice intéressante à calculer

est donc $A^2 = P^{-1} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) On a donc $B(0) = I_3$ et $B(1) = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On n'écrit surtout pas les matrices explicitement : $B(t)B(t')$

$= \left(I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) \left(I_3 + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 \right) = I_3 + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2$ (on a supprimé les puissances de A supérieures ou égales à 3 puisqu'elles sont nulles). Achéons le calcul : $B(t)B(t') = I_3 + (t+t')A + \frac{t^2 + 2tt' + t'^2}{2}A^2 = I_3 + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2 = B(t+t')$.

(c) D'après la question précédente, $B(t)B(-t) = B(0) = I_3$, donc $B(t)$ est inversible et $(B(t))^{-1} = B(-t) = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

(d) On va simplement prouver par récurrence que $(B(t))^n = B(nt)$. En effet, pour $n = 0$, ça marche : $(B(t))^0 = I_3 = B(0)$, et en supposant la propriété vraie au rang n , alors $(B(t))^{n+1} = (B(t))^n B(t) = B(nt)B(t) = B(nt+t) = B((n+1)t)$ en exploitant la relation démontrée plus haut. La formule fonctionne très bien pour $n = -1$ puisqu'elle redonne $(B(t))^{-1} = B(-t)$. Pour tout entier n , on a donc $(B(t))^n = I_3 + ntA + \frac{n^2 t^2}{2}A^2$.

- (e) On veut donc $I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = A$, ou encore $I_3 + (t-1)A + \frac{t^2}{2}A^2$. Si on regarde ce que donne cette égalité pour le premier coefficient de la deuxième ligne (où I_3 et A^2 ont toutes deux un coefficient nul mais pas A), on en déduit immédiatement que $t-1=0$, donc $t=1$. Sauf que $t=1$ n'est pas du tout solution de l'équation (on a calculé $B(1)$ plus haut, et elle n'est pas égale à A). Bref, $\mathcal{S} = \emptyset$ (en voilà une question intéressante!).

Problème

A. Étude d'une fonction.

- La fonction f est le produit de deux fonctions impaires (la composée de deux fonctions impaires reste impaire, donc $x \mapsto \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien impaire), donc c'est une fonction paire (on peut aussi écrire le calcul de $f(-x)$, bien entendu).
- C'est le taux d'accroissement de la fonction sh en 0, il a donc pour limite $\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$. En posant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, on constate que $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(X)}{X}$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(X)}{X} = 1$. On pouvait bien sûr aussi utiliser la parité pour justifier que les deux limites sont égales.
- Calcul de dérivée tout à fait banal : $f'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right) = \left(\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$.
- La fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur ne s'annule jamais), de dérivée $\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Comme on se souvient de la seule formule de trigonométrie hyperbolique au programme ($\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$), on peut simplifier : $\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0$.
Notons qu'on pouvait aussi écrire $\operatorname{th}'(x) = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$. Quoi qu'il en soit, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs paire, et $\operatorname{th}(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

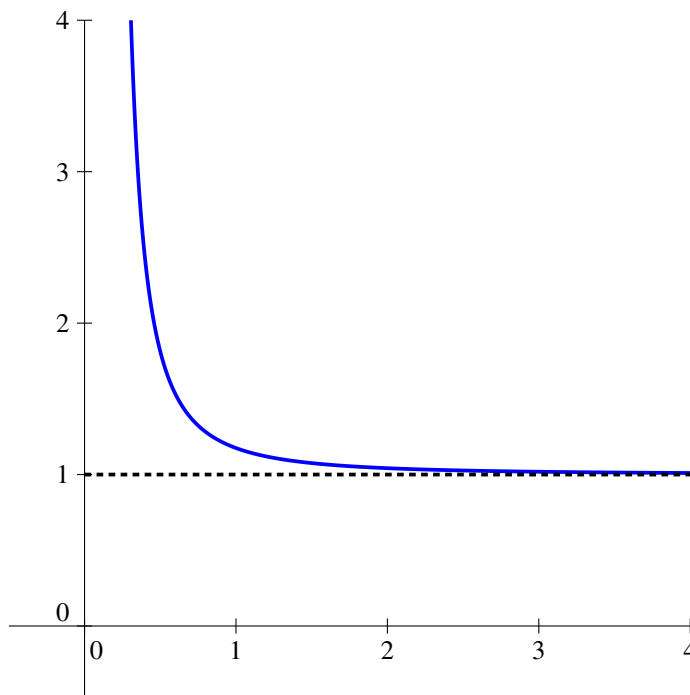
x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	-1	0	1

Si on pose $w(x) = \operatorname{th}(x) - x$, on constate que $w'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x) - 1 = -\operatorname{th}^2(x) < 0$, donc la fonction w est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme $w(0) = 0$, w est négative sur $]0, +\infty[$, ce qui prouve qu'on a alors $\operatorname{th}(x) < x$.

- D'après la question précédente $\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$ sur $]0, +\infty[$ (si $x > 0$, $\frac{1}{x}$ aussi, on peut lui appliquer l'inégalité $\operatorname{th}(X) < X$), donc $f'(x) < 0$. Il ne reste plus qu'à signaler que, en posant $X = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{e^X}{X} - \frac{e^{-X}}{X}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} - \frac{e^{-X}}{X} = 0$ (croissance comparée) pour conclure :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	1

6. Pas grand chose de passionnant à indiquer :



7. Comme $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$, le calcul de la question 2 prouve qu'on peut en effet prolonger par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. Le prolongement sur $] -\infty, 0[$ se fait tout bêtement en gardant la même formule, qui est initialement définie sur $\mathbb{R}^*$.

B. Une équation différentielle.

1. L'équation homogène normalisée $y' + \frac{1}{x}y = 0$ a pour solutions toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(x) = \frac{K(x)}{x}$ (méthode de variation de la constante). On calcule donc $y_p'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$. La fonction y_p est solution de (E) si $\frac{xK'(x) - K(x)}{x} + \frac{K(x)}{x} = \text{ch}(x)$, donc tout bêtement si $K'(x) = \text{ch}(x)$. On peut donc prendre $K(x) = \text{sh}(x)$, la fonction y_p définie par $y_p(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ est solution particulière de (E), dont toutes les solutions sont donc de la forme $y(x) = \frac{\text{sh}(x) + K}{x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. On change juste le nom de la constante par principe : $y(x) = \frac{\text{sh}(x) + L}{x}$, avec $L \in \mathbb{R}$.
3. Pour obtenir une fonction solution sur $\mathbb{R}$ il faut une limite commune en 0 pour les deux formules précédentes. Or, pour avoir une limite finie en 0, on est obligé de poser $K = L = 0$,

et on a alors $y(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ sur chacun des deux intervalles, avec une même limite égale à 1 en 0. Une fois prolongée par continuité en 0, la fonction est bien égale à g .

C. Étude d'une suite.

1. La fonction f est continue et strictement monotone, donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $]1, +\infty[$. Comme $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ appartient toujours à l'intervalle $]1, +\infty[$, il admet toujours un antécédent unique par f .
2. Par définition, on aura $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$, et $f(u_{n+1}) = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$, donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$. La fonction f étant strictement décroissante, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$, la suite (u_n) est donc bien croissante.
3. Si la suite (u_n) est majorée, étant croissante, elle admettra une limite finie l . Mais alors, la fonction f étant continue, on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$. Or, on sait que $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$ a une limite égale à 1, et que l'équation $f(l) = 1$ n'admet pas de solution dans $]0, +\infty[$. C'est donc que la suite (u_n) ne peut pas être majorée, et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

D. Une fonction définie par une intégrale.

1. En revenant à la définition, $2 \text{ch}(x) \text{sh}(x) = \frac{2(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} = \text{sh}(2x)$. On remarquera en passant la similitude avec la formule de duplication bien connue du sinus $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.
2. Par définition de l'intégrale, on aura $J(x) = F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)$, donc en dérivant correctement la composée, $J'(x) = f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \text{sh}\left(\frac{2}{x}\right) = f(x) - \frac{x}{4} \times 2 \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$ en utilisant le résultat démontré à la question précédente. On trouve donc bien $J'(x) = f(x) \times \left(1 - \frac{1}{2} \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
3. La fonction f étant à valeurs positives, il faut déterminer le signe de $1 - \frac{1}{2} \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{4}$. Posons donc $X = e^{\frac{1}{x}}$ pour nous ramener à l'étude du signe de $4 - X - \frac{1}{X} = \frac{4X - X^2 - 1}{X}$. Le numérateur de cette fraction a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 = 12$, et admet pour racines $X_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{-2} = 2 + \sqrt{3}$ et $X_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$. La valeur $\frac{1}{\ln(X_2)}$ est négative et ne nous intéresse donc pas, par contre J' s'annule pour $x = \frac{1}{\ln(2 + \sqrt{3})} = \alpha$ (cf notations plus loin dans l'énoncé). De plus, $J'(x) > 0$ quand $e^{\frac{1}{x}}$ est situé à l'intérieur des racines, donc quand $x > \alpha$. La fonction J est donc décroissante sur $]0, \alpha[$ puis croissante sur $]\alpha, +\infty[$.
4. Pour avoir l'asymptote oblique donnée dans l'énoncé, on doit nécessairement avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$. D'où le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
J	$+\infty$	$J(\alpha)$	$+\infty$

5. On place bien entendu l'asymptote (en conservant la courbe au-dessus) et le minimum qu'on nous a gentiment fournis, et pas grand chose d'autre :

