Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3

PTSI B Lycée Eiffel

21 novembre 2020

Exercice 1

Les calculs de ce premier exercice sont complètement indépendants les uns des autres.

1. Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$. Donner la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\ dx$ en commençant par effectuer le changement de variables $t = \sqrt{x}$.
3. Résoudre l'équation différentielle $\ln(x)y' + \dfrac{1}{x}y = 1$ sur chacun des intervalles où cela a un sens.
   Peut-on trouver une fonction continue sur $]0, +\infty[$ (on ne demande PAS de vérifier la dérivabilité) qui soit solution de l'équation ?
4. Calculer et simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (2i-j)^2$.
5. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-x-6}\ dx$.
6. Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' - 3xy' + 4y = x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en procédant au changement de variable $t = \ln(x)$.
   Donner l'unique solution de l'équation vérifiant les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 4$.

Exercice 2

On s'intéresse dans cet exercice à des sommes de la forme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times q^k$, où q est un nombre réel différent de 1. On va donner plusieurs méthodes pour calculer explicitement cette somme.

1. Première méthode : via un calcul de somme double.
   (a) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} q^k$.
   (b) En écrivant cette somme double « dans l'autre sens », calculer S_n.
2. Deuxième méthode : via un calcul astucieux.
   (a) Montrer que $qS_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} (k-1)q^k$, puis que $(1-q)S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
3. Troisième méthode : via un calcul de dérivée.
   (a) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser le symbole $\sum$.
   (b) Calculer $f'(x)$ de deux façons : sous forme de somme et en partant de son expression explicite.
   (c) Exploiter les calculs précédents pour déterminer la valeur de S_n.

4. Quatrième méthode : par récurrence.
Redémontrer la formule obtenue à l'une des trois questions précédentes par récurrence.
5. Application : en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k \times 3^k$.

Exercice 3

On cherche dans cet exercice à résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle du second ordre $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$, que l'on notera (E).

1. Quelle caractéristique de cette équation fait que vous ne connaissez pas de méthode pour la résoudre ?
2. Déterminer une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ qui soit solution de l'équation (E).
3. Si g et h sont deux solutions quelconques de l'équation (E), on note $W(x) = g(x)h'(x) - g'(x)h(x)$. Montrer que $W'(x) = \frac{2+x}{x}W(x)$.
4. En déduire les valeurs possibles de la fonction W.
5. Déduire des calculs précédents une deuxième fonction g solution de l'équation (E). On vérifiera que g est bien solution de l'équation en calculant explicitement g' et g'' et en remplaçant dans (E).
6. On admet que toutes les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Af(x) + Bg(x)$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'unique solution y_0 de (E) vérifiant les conditions initiales $y_0(1) = 2 - e$ et $y_0'(1) = 2 - 2e$.
7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 y_0(x)\, dx$.
8. La lettre W utilisée pour désigner la fonction de la question 3 est l'initiale du mot Wronskien. Combien de points rapporterait le mot « Wronskien » s'il était autorisé au Scrabble (cette question est bien entendu une blague, mais rien ne vous empêche d'y répondre si ça vous amuse) ?

Exercice 4

On s'intéresse dans cet exercice à la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

1. Calculer les valeurs de S_0, S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que $S_{n+2} - S_n \leqslant 0$ si n est un entier pair, et $S_{n+2} - S_n \geqslant 0$ si n est impair.
3. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k$.
En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$.
4. Calculer $\int_0^1 (-1)^k t^{2k}\, dt$, et en déduire une expression de S_n à l'aide d'intégrales.
5. Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, puis en déduire la limite de $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$ quand n tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivante : si deux fonctions f et g sont telles que $f(t) \leqslant g(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt$).
6. Calculer à l'aide des questions précédentes la limite $\lim_{n \to +\infty} S_n$, qu'on notera l pour la fin de l'exercice.
7. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $S_{2n+1} \leqslant l \leqslant S_{2n}$.
8. Expliquer comment calculer à l'aide des sommes S_n une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre π (on sera précis sur le calcul à effectuer, mais on ne fera bien sûr pas l'application numérique à la main !).